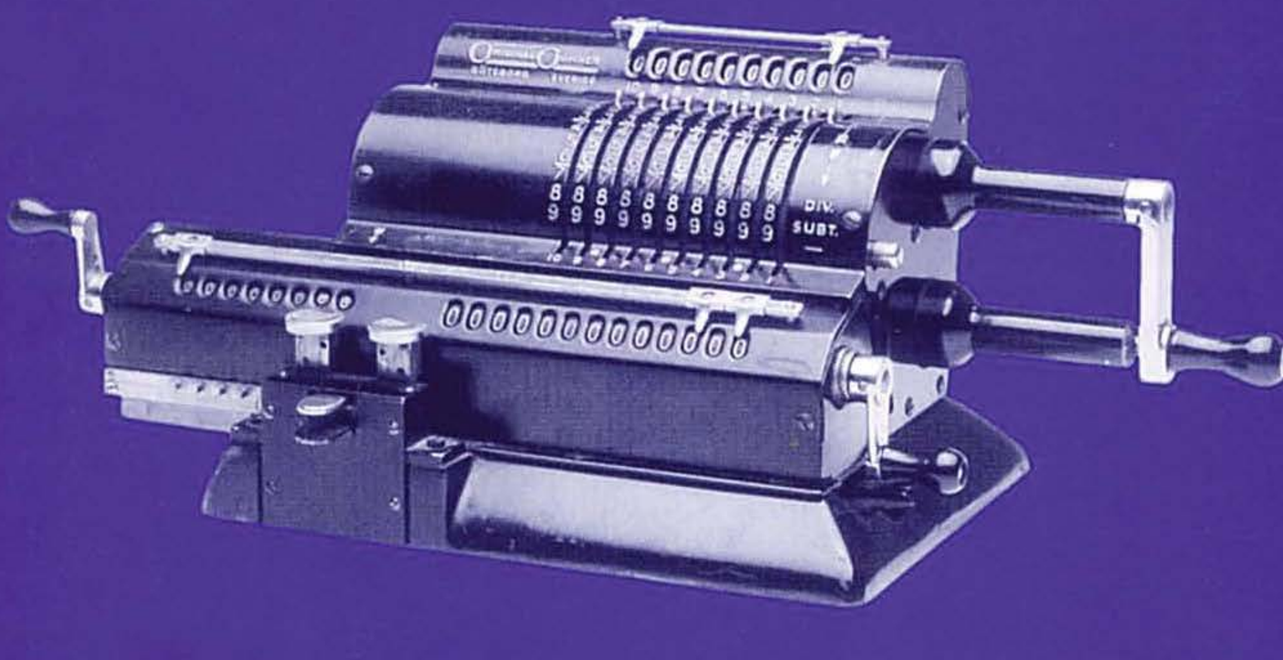
E

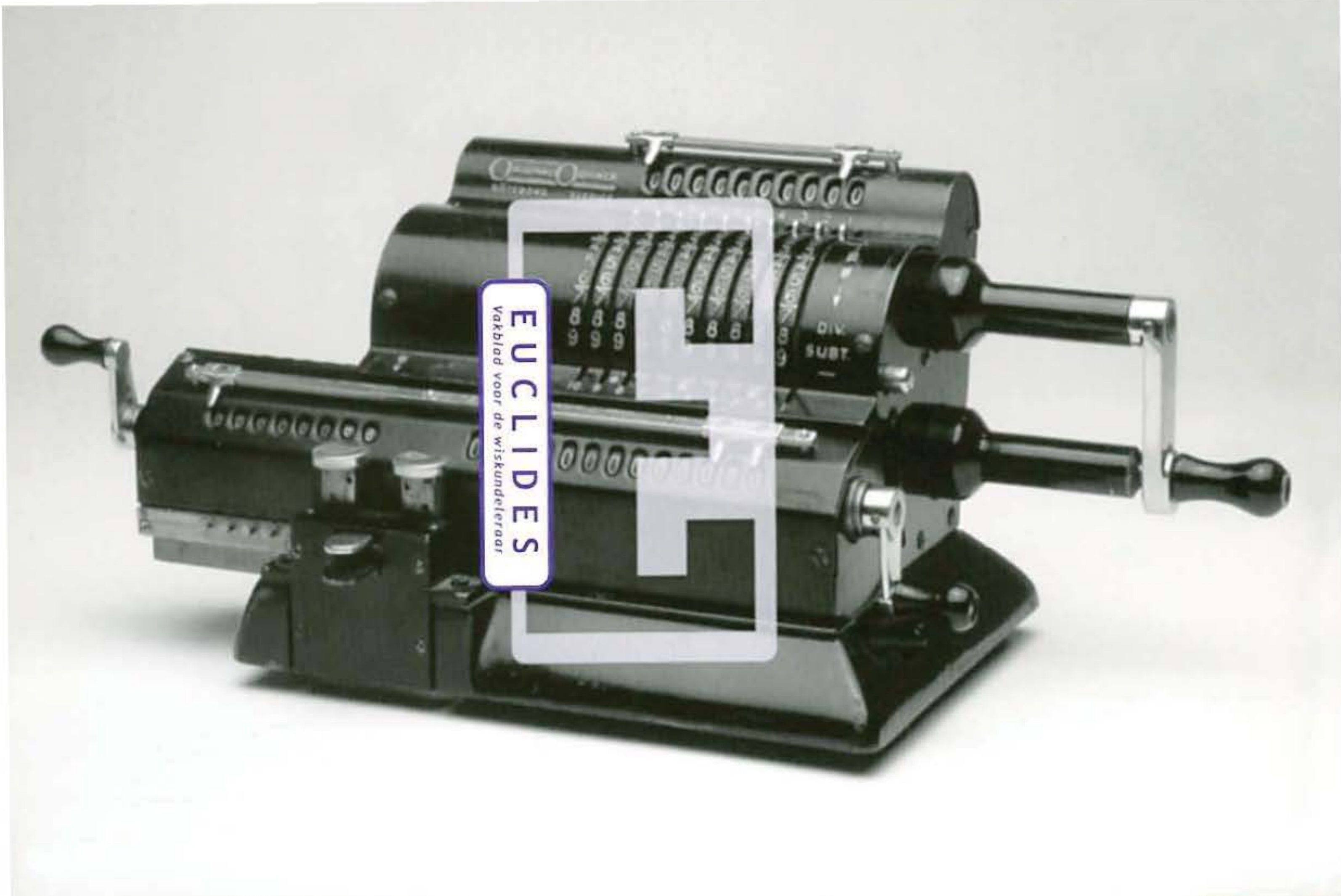
EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

Gelijkvormigheid
Aansluiting VWO-WO
ICT

december
2004/nr.3
jaargang 80





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 45,00
Studentleden: € 25,00
Gepensioneerden: € 30,00
Leden van de VVWL: € 30,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 30,00
Bijdrage WwF: € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 50,00
Instituten en scholen: € 130,00
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

3

december 2004 JAARGANG 80

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boelens, Elzeline de Lange en Jan Smit.

Voorpagina:
Rekenmachine van Odhner (ca. 1925)
'Aktiebolaget Original Odhner, Göteborg, Sverige No. 22-24878'

Van de redactietafel

[Marja Bos]

In Memoriam

Eind september werden velen van ons opgeschrikt door twee overlijdensberichten, de een van Jack van Lint (72), de ander van Eugène Welling (46). Prof.dr. J.H. van Lint (broer van voormalig NVvW-voorzitter Hans van Lint) was emeritus hoogleraar wiskunde en voormalig rector magnificus van de Technische Universiteit Eindhoven. Hij was lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Recent, in 2001/2002, leidde hij de onderwijsvisitatie van de universitaire wiskundeopleidingen. Daarnaast voelde Van Lint zich altijd sterk betrokken bij het wiskundeonderwijs in het vwo.
Eugène Welling was werkzaam aan de Universiteit Twente, onder meer als vakdidacticus wiskunde. Samen met zijn collega's van de lerarenopleidingen van de TU Delft en de TU Eindhoven bracht hij een gemeenschappelijk programma vakdidactiek tot stand voor a.s. leraren wiskunde. Eugène Welling verongelukte bij de uitoefening van zijn hobby, tijdens een vlucht met een sportvliegtuigje.
Met het overlijden van Van Lint en Welling heeft de wiskunde(onderwijs)wereld een gevoelig verlies geleden.

Zestig procent?

Op dit moment wordt hard gewerkt aan de totstandkoming van nieuwe examenprogramma's wiskunde voor havo en vwo. Voor het havo gaat het om twee profielvakken wiskunde (één voor EM/NG en één voor NT/NG), voor het vwo om drie (één voor CM, één voor EM/NG en één voor NT/NG). Ook wordt verder doorgedacht over voortgezette wiskunde.
Zoals bekend is de studielast van de wiskundeprogramma's drastisch ingekort. Daarnaast zal, om overladenheid te voorkomen, terughoudend omgegaan moeten worden met het 'vullen' van de nieuwe programma's. En tot slot is er een maatregel genomen die verdere inperking met zich meebrengt: slechts een deel van het programma, waarschijnlijk zo'n 60%, zal vanaf 2007 worden aangewezen voor centrale examinering; de rest wordt in globaal geformuleerde eindtermen toebedeeld aan het schoolexamen.
De vrijheid om als school, als wiskundesectie, die 40% onder eigen verantwoordelijkheid vorm te geven is op zich natuurlijk heel aantrekkelijk en uitdagend. Tegelijkertijd zullen daardoor veel onderlinge verschillen ontstaan. Het 'kerncurriculum' (met een door het Centraal Examen afgedwongen inhoud en eindniveau) zal dus slechts een fractie worden van het huidige programma; het vervolgonderwijs zal op beduidend minder wiskundige voorkennis van instromende studenten kunnen rekenen dan nu.
Natuurlijk, ook buiten dat kernprogramma zullen leerlingen via het schoolexamen een hoop kennis en vaardigheden verwerven – maar de inhoud ervan zal per school, per docent verschillen.
Wat stoppen we in zo'n kerncurriculum? Welke onderdelen, welke vaardigheden? En dus ook: wat houden we erbuiten?

Didactiek

Door alle gedoe rond 'programmakwesties' (in onderbouw, vmbo, havo/vwo, en niet te vergeten het mbo en hbo) én door allerlei schoolorganisatorische zaken dreigt het nadenken over effectieve *manieren* waarop leerlingen wiskunde kunnen leren wel eens op de achtergrond te raken. En is dat niet bij uitstek ons vak, om juist dat *leren* goed te organiseren?! Toch lijkt er op veel scholen grote verwarring te bestaan over de rol van de docent...
Voor wiskunde kennen we tal van vakdidactische principes die hun waarde sinds jaar en dag bewezen hebben. Uiteraard gaan de ontwikkelingen dóór. Het is dus zaak om bij nieuwe onderwijsvormen en in veranderende omstandigheden alert te blijven, en te overdenken in hoeverre onze didactische aanpak bijgesteld kan of moet worden om een adequate vorm van leren beter mogelijk te maken. Misschien kan het manifest 'Wiskundedidactiek anno 2005', in dit nummer van Euclides bijgesloten, een aanzet geven om hierover met elkaar van gedachten te wisselen.

GELIJKVORMIGHEID

Jonge inzichten bij een oud concept (II)

[Wim Pijls]

1. Inleiding

Deze bijdrage is het vervolg op een eerder artikel over gelijkvormigheid, verschenen in het oktobernummer van Euclides (jaargang 80, nummer 2, pp. 49-51). Zoals in dat deel I reeds werd vermeld, bestaat er een eenvoudige karakterisering van congruentieafbeeldingen (CA's). Elke CA is te schrijven als een van de volgende vier bewerkingen: spiegeling, glijspiegeling, translatie of rotatie. We hebben een gelijkvormigheidsafbeelding (GA) in het vorige artikel gedefinieerd onder andere als de samenstelling van een congruentieafbeelding met een *puntvermenigvuldiging*, voortaan aan te duiden als *pv*. In dit tweede artikel zullen we de GA's karakteriseren op soortgelijke manier als bij de CA's gebeurd is, dat wil zeggen we tonen aan dat elke GA door middel van één bewerking te beschrijven is. We voeren daartoe twee nieuwe bewerkingen in, namelijk de spiegelstrekking en de draaistrekking. Een GA, bestaande uit een lijnspiegeling gevolgd door een pv met het centrum op de spiegelas, wordt een *spiegelstrekking* genoemd (zie figuur 1a). Een spiegeling om l gevolgd door een pv met centrum M voert A_1 over in A_2. Een GA bestaande uit een draaiing over een hoek α gevolgd door een pv, beide met hetzelfde centrum, heet een *draaistrekking*. In figuur 1b is N het centrum van een draaistrekking die A_1 in A_2 overvoert. In dit artikel wordt aangetoond dat een GA die een vergrotingsfactor ongelijk aan 1 heeft, en dus geen CA is, altijd een spiegelstrekking of een draaistrekking is. We werken met georiënteerde hoeken. Bij twee rechten l en m bedoelen we met $\angle(l,m)$ de kleinste hoek waarover je l moet draaien om m te krijgen. Als je antikloksgewijs draait, is de hoek positief, anders negatief. De waarde van $\angle(l,m)$ wordt dus modulo 180° gemeten. Deze conventie is afkomstig van [Johnson]. Met $\angle ABC$ wordt ook steeds een georiënteerde hoek bedoeld.

2. De Apolloniuscirkel

Laat twee punten X en Y en een willekeurig positief getal k met $k \neq 1$ gegeven zijn. De volgende stelling geldt dan.

De meetkundige plaats van punten Z met $ZY = k \cdot ZX$ is een cirkel Γ, de zogeheten Apollonius-cirkel voor punten X en Y met factor k. Zie figuur 2.

In [Klingens] kan men een bewijs van deze stelling vinden. Het middelpunt van deze cirkel ligt op de rechte door X en Y. Het lijnstuk PP', met P en P' de snijpunten van de cirkel met de rechte door X en Y, is dus een diameter van de cirkel.

Voor P en elk ander punt Z op Γ gelden de relaties $PY = k \cdot ZX$ en $ZY = k \cdot ZX$. Een bekende stelling zegt nu dat ZP bissectrice is in driehoek XZY. Voor elke Z op Γ is er derhalve een spiegelstrekking met centrum Z en factor k, die X overvoert in Y. Omgekeerd, als een spiegelstrekking met centrum Z en factor k punt X overvoert in Y dan ligt Z op Γ. De spiegelas hierbij is steeds ZP.

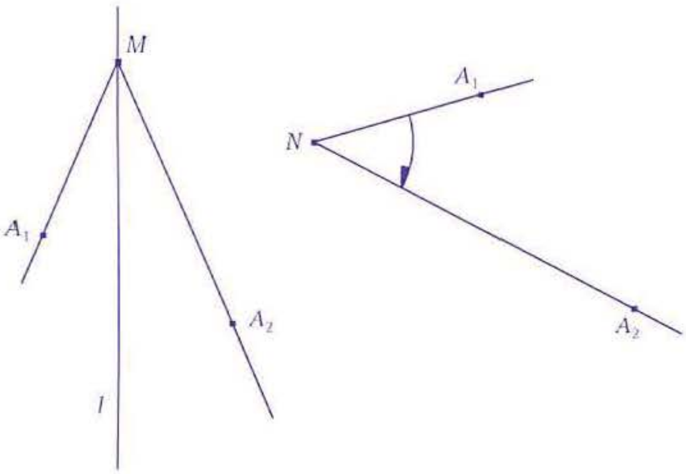
Verder is er ook voor elke Z op Γ een draaistrekking met draaihoek XZY en factor k die X overvoert in Y. En weer geldt omgekeerd dat het centrum Z van zo'n draaistrekking op Γ moet liggen.

3. GA's met factor $k \neq 1$

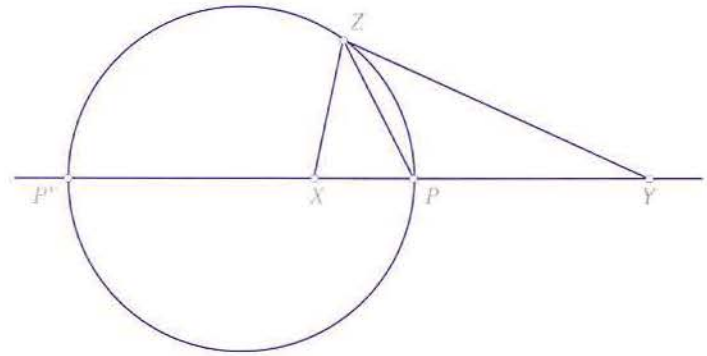
Laat twee lijnstukken A_1B_1 en A_2B_2 gegeven zijn met $k = A_2B_2/A_1B_1$ een waarde ongelijk aan 1. We gaan op zoek eerst naar een spiegelstrekking die A_1B_1 op A_2B_2 afbeeldt en vervolgens naar een draaistrekking die hetzelfde doet. Zoals we in paragraaf 2 gezien hebben, zijn de Apollonius-cirkels nuttig voor dit doel. Laat Γ_A de Apollonius-cirkel zijn voor de punten A_1 en A_2 met factor k en laat Γ_B de Apollonius-cirkel zijn voor B_1 en B_2 eveneens met factor k (zie figuur 3). Het snijpunt van Γ_A met A_1A_2 heet P en het snijpunt van Γ_B met B_1B_2 heet Q. De rechte l is de rechte door P en Q.

De spiegelstrekking

In paragraaf 2 zagen we dat een spiegelstrekking tussen A_1 en A_2 met centrum Z en factor k bestaat dan en slechts dan als Z op Γ_A ligt. De spiegelas van zo'n spiegelstrekking is altijd ZP. Evenzo hebben we gezien



FIGUUR 1a en 1b



FIGUUR 2

dat de spiegelas van elke spiegelstrekking met factor k tussen B_1 en B_2 door Q moet gaan. Daarom kiezen we als Z op Γ_A het punt M, zodanig dat lijn MP door Q gaat. Anders gezegd: M is het snijpunt van l en Γ_A. We weten nu dat de spiegelstrekking met as MPQ en factor k punt A_1 op A_2 afbeeldt. We tonen in de volgende alinea aan dat deze spiegelstrekking ook B_1 op B_2 afbeeldt.

In figuur 4 zijn rechten m_1 en m_2 evenwijdig aan l getekend door resp. A_1 en A_2. Punt D is het snijpunt van rechte A_2Q met m_1. De gelijkheid $A_2P = k{\cdot}A_1P$ in combinatie met $m_1 // l$ zegt dat $A_2Q = k{\cdot}DQ$. Omdat ook $QB_2 = k{\cdot}QB_1$ geldt, zegt een bekende stelling ten eerste dat $DB_1 // A_2B_2$ en dus $\angle(B_1D, m_1) = \angle(B_2A_2, m_2)$ en ten tweede dat $A_2B_2 = k{\cdot}DB_1$. Deze laatste gelijkheid in combinatie met $A_2B_2 = k{\cdot}A_1B_1$ toont aan dat driehoek A_1B_1D gelijkbenig is. In deze gelijkbenige driehoek hebben we $\angle(B_1D, m_1) = -\angle(B_1A_1, m_1)$ en hieruit volgt dan $\angle(B_1A_1, m_1) = -\angle(B_2A_2, m_2)$. De configuratie bestaande uit MA_1 en lijn m_1 wordt door bovengenoemde spiegelstrekking afgebeeld op MA_2 met lijn m_2. Omdat $\angle(B_1A_1, m_1) = -\angle(B_2A_2, m_2)$ (het minteken is hier relevant) en $A_2B_2 = k{\cdot}A_1B_1$, gaat B_1 over in B_2 door bovengenoemde spiegelstrekking.

De draaistrekking

We hebben net gezien dat een spiegelstrekking met factor k en centrum M punt B_1 overvoert in B_2. Hieruit volgt $MB_2 = k{\cdot}MB_1$ en M ligt dus behalve op Γ_A ook op Γ_B. We weten nu dat de twee cirkels elkaar snijden, hetgeen niet bij voorbaat vaststond. Het andere snijpunt van de cirkels noemen we N. Voor punt N als punt op beide cirkels geldt dat het het centrum is van een draaistrekking die A_1 in A_2 overvoert, en evenzo van een draaistrekking die B_1 in B_2 overvoert, beide met factor k. Deze draaistrekkingen zijn identiek indien $\angle A_1NA_2 = \angle B_1NB_2$. We zullen nu aantonen dat zulks inderdaad het geval is.

Zie figuur 3. PP' en QQ' zijn middellijnen van de Apollonius-cirkels. De hoeken PNP' en QNQ' zijn dus beide recht. We hebben verder: $\angle PMN = \angle PP'N$ (hoeken op gelijke bogen) en evenzo $\angle QMN = \angle QQ'N$. Omdat $\angle PMN = \angle QMN$ (dezelfde hoek), concluderen we dat $\angle PP'N = \angle QQ'N$. De rechthoekige driehoeken $PP'N$ en $QQ'N$ zijn dus gelijkvormig. De verhouding waarin A_1 en A_2 tot P en P' staan, is dezelfde als waarin B_1 en B_2 tot Q en Q' staan. De configuratie $NPP'A_1A_2$ is dus gelijkvormig met $NQQ'B_1B_2$. Hieruit volgt $\angle A_1NA_2 = \angle B_1NB_2$.

Bijzondere gevallen

Als l loodrecht staat op A_1A_2 en dus op PP', dan raakt l aan Γ_A met P als raakpunt. Dit punt speelt dan ook de rol van M. Alles verloopt verder als boven beschreven. Merk op dat l niet loodrecht kan staan op zowel A_1A_2 als B_1B_2, omdat dan $A_1A_2B_1B_2$ een gelijkbenig trapezium is en dus $k = A_2B_2/A_1B_1 = 1$ geldt.

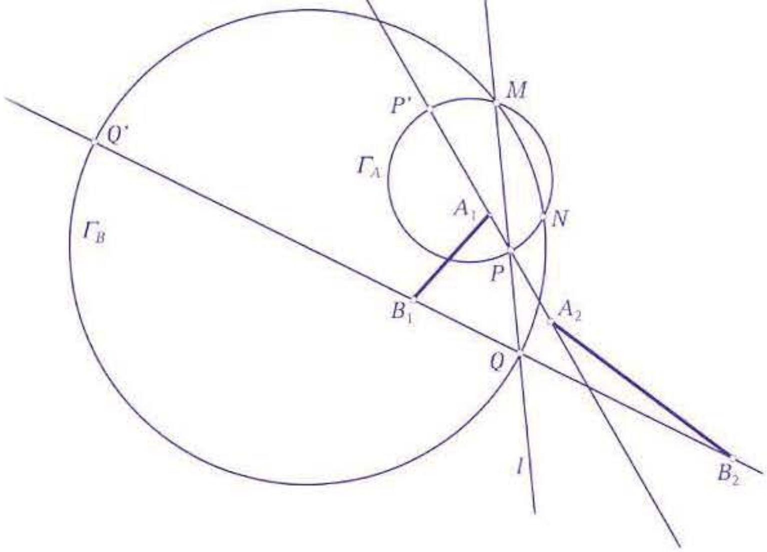
Als A_1B_1 en A_2B_2 evenwijdig zijn, dan snijden A_1A_2 en B_1B_2 elkaar in een punt dat het centrum van een pv is, die A_1B_1 overvoert in A_2B_2. Dit punt ligt op beide Apollonius-cirkels en speelt de rol van punt N. Zie figuur 5a en 5b. Punt N valt in figuur 5a samen met P en Q en in figuur 5b met P' en Q'. In beide figuren staan A_1B_1 en A_2B_2 loodrecht op MN.

Opmerkingen

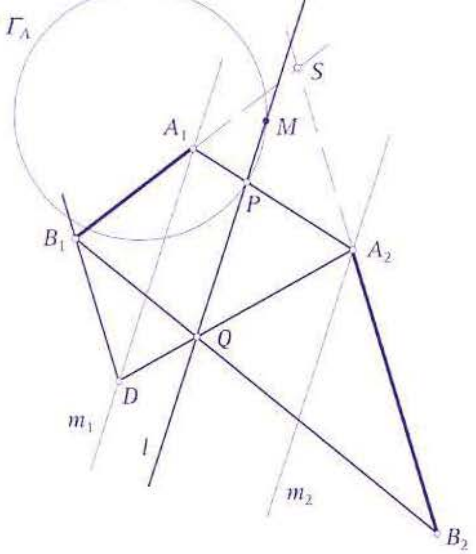
- Omdat PP' en QQ' middellijnen zijn van cirkels, hebben we $P'M \perp l$ en $Q'M \perp l$. Dit geldt in figuur 3 alsook in figuur 5a en 5b. De bovenbeschreven spiegelstrekking is gelijkwaardig met een spiegelstrekking met as $P'Q'$ en factor $-k$.
- Een algemene stelling zegt dat de draaihoek van een draaistrekking tussen A_1B_1 en A_2B_2 gelijk is aan $\angle(A_1B_1, A_2B_2)$ modulo 180°. De in deze paragraaf beschreven draaistrekking heeft dus een draaihoek gelijk aan de hoek bij S of bij B_1 in figuur 4.

4. De karakterisering van de GA's

Hoe is een GA met $k \neq 1$ algemeen te karakteriseren? Stel we hebben drie punten A_1, B_1 en C_1 (niet op een rechte) die door een gegeven GA op de punten A_2, B_2 en C_2 worden afgebeeld. (Merk op dat A_2, B_2 en C_2 evenmin collineair zijn, want anders is er geen sprake



FIGUUR 3



FIGUUR 4

van een GA.) Elk niet-collineair drietal heeft ofwel een kloksgewijze ofwel een antikloksgewijze oriëntatie. Als de oriëntatie van $A_1B_1C_1$ dezelfde is als die van $A_2B_2C_2$, dan zal de draaistrekking die A_1B_1 in A_2B_2 overvoert, ook C_1 in C_2 overvoeren. Als de oriëntaties tegengesteld zijn, zal de spiegelstrekking tussen A_1B_1 en A_2B_2 punt C_1 in C_2 overvoeren. Als het beeld van een GA voor drie punten bepaald is, is het beeld voor alle punten bepaald.

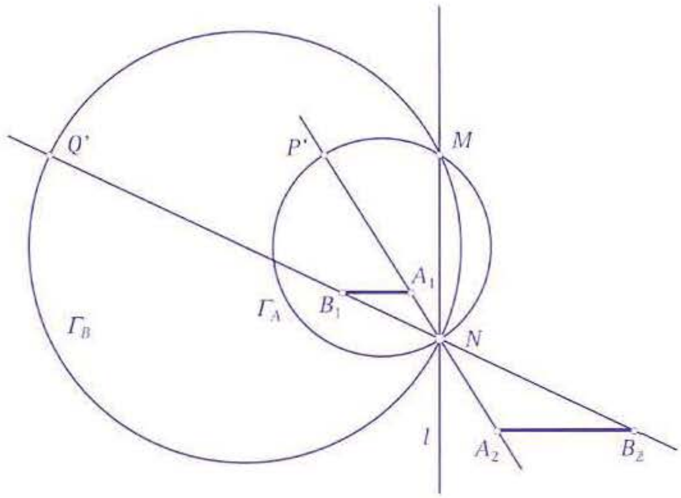
De GA's met $k = 1$ zijn de CA's en hun karakterisering is reeds in de inleiding genoemd. Omdat een lijnspiegeling en een draaiing een bijzonder geval zijn van resp. een spiegelstrekking en een draaistrekking, mag men stellen dat elke GA door één van de volgende vier bewerkingen te beschrijven is: translatie, draaispiegeling, spiegelstrekking of glijspiegeling. De eerste twee behouden de oriëntatie van elk drietal en heten daarom *directe* GA's, de laatste twee keren de oriëntatie van elk drietal om en heten daarom *indirect*. In het verlengde hiervan spreekt men ook van twee directe en of twee indirecte gelijkvormige figuren.

Dilataties. Een GA die elke rechte overvoert in een daarmee evenwijdige rechte noemen we een dilatatie of homothetie. In paragraaf 3 zagen we dat twee evenwijdige lijnstukken van ongelijke lengte door een pv of een spiegelstrekking in elkaar overgaan. Omdat spiegelstrekkingen niet, maar pv's wel aan de homothetie-definitie voldoen, mogen we stellen dat elke homothetie met factor $k \neq 1$ een pv is. De karakterisering van de CA's laat zien, dat als homothetie met $k = 1$ alleen een translatie of een puntspiegeling (een pv met factor -1) in aanmerking komen. We concluderen derhalve: een homothetie is een translatie of een pv. Als het product van de factoren ongelijk aan 1 is, is de samenstelling van twee pv's dus weer een pv. Deze eigenschap kan gebruikt worden om de stelling van Menelaos te bewijzen; hij is er feitelijk equivalent mee. Zie ook [Coxeter-1] en [Kindt].

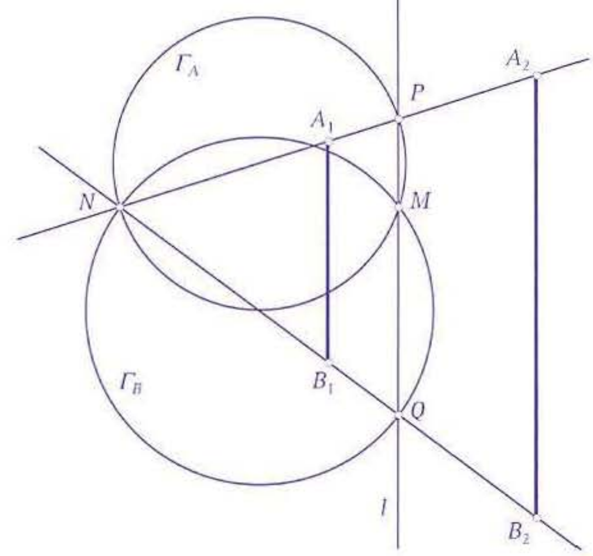
Opgave. Met behulp van de bovenbeschreven karakterisering van direct gelijkvormige figuren, kan men de stelling van Petersen-Schoute[1] bewijzen. Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.
De stelling luidt als volgt:
Laat twee direct gelijkvormige figuren G_1 en G_2 gegeven zijn. Als bij elk tweetal corresponderende punten A_1 en A_2 op resp. G_1 en G_2 een derde punt A_3 op de rechte A_1A_2 wordt gekozen zodanig dat de verhouding A_1A_3/A_2A_3 constant is voor elk drietal, dan is G_3, de figuur bestaande uit alle punten A_3, direct gelijkvormig met G_1 en G_2.
(We moeten uitsluiten dat de betrokken GA een pv is waarbij A_3 steeds het centrum van de pv is.)
Men moet dus feitelijk bewijzen: als G_1 en G_2 door een draaistrekking of translatie in elkaar overgaan, dan is er ook een draaistrekking of translatie die G_1 in G_3 overvoert.
De stelling geldt ook als A_3 niet op A_1A_2 gekozen wordt, maar zodanig dat $A_1A_2A_3$ een driehoek is gelijkvormig met een vaste gegeven driehoek. Ook in deze vorm draagt de stelling de naam van Petersen-Schoute. Volgens [Weisstein] is deze vorm ook bekend als Douglas-Neumann stelling of als 'Fundamental Theorem of Directly Similar Figures'.

5. Slotopmerkingen

De opmerking aan het einde van paragraaf 2, dat de draaihoek om centrum N gelijk is aan de hoek bij S, impliceert dat de cirkel door A_1, A_2 en S ook door N gaat. Een analoge uitspraak geldt voor de punten B_1, B_2, S en N. Deze eigenschappen op hun beurt maken het mogelijk punt N te construeren wanneer de lijnstukken A_1B_1 en A_2B_2 (en dus ook S) gegeven zijn. In de literatuur wordt aldus het bestaan van een draaistrekking tussen twee gegeven lijnstukken A_1B_1 en A_2B_2 aangetoond. Zie [Klingens], [Wijdeveld], [Johnson] of [Yaglom]. Het bestaan van een spiegelstrekking tussen twee gegeven lijnstukken wordt in de literatuur ofwel niet ofwel onvolledig bewezen. Met de bedoeling deze lacune op te vullen, had ik in de



FIGUUR 5a



FIGUUR 5b

eerste versie van dit artikel een bewijs voor het bestaan van een spiegelstrekking opgenomen. Aad Goddijn van het Freudenthal Instituut kwam na lezing van deze eerste versie met een voorstel voor een ander en korter bewijs, het bewijs dat in paragraaf 3 behandeld is. Dit bewijs heeft het voordeel dat de Apollonius-cirkels de draaistrekking er meteen bij leveren.
Aad laat weten dat hij dit bewijs op het spoor gekomen is dankzij de mogelijkheden die Cabri biedt. Hij geeft hiermee gestalte aan zijn in [Goddijn] gelanceerde ideeën over het beoefenen van meetkunde.
Ik ben Aad, die de artikelen ook op andere punten kritisch bekeken heeft, zeer erkentelijk voor zijn bijdragen.

We willen niet onvermeld laten dat voor de karakterisering van de GA's ook een geheel andere aanpak bestaat. In de zestiger jaren heeft Steger, een student van Coxeter, een elegant bewijs van de volgende stelling gegeven:
Elke GA met factor $k \neq 1$ beeldt één punt op zichzelf af. Het volledige bewijs is gepubliceerd in [Coxeter-2] (niet in de oudere uitgaven van dit boek) en is ook te vinden in [Craats]. Uit deze stelling is de in ons artikel gegeven karakterisering van GA's makkelijk af te leiden.

In het vorige artikel zijn we begonnen met Euclides (300 v.Chr.). We hebben in het tweede artikel enkele recente vondsten gepresenteerd.
De meetkunde is kennelijk een eeuwige speeltuin voor de liefhebbers van de wiskunde.

Noot

[1] P.H. Schoute, 1846-1923, hoogleraar wiskunde te Groningen.

Literatuur

[Coxeter-1] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: Geometry Revisited. New Mathematical Library nr. 19, Random House / The Singer Company, 1967.
[Coxeter-2] H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry. John Wiley, New York, 1969 (2nd edition).
[Craats] J. van de Craats: Euclidische transformatiemeetkunde. In: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jrg. 66, afl. 2 (november 1978), pp. 76-104.
[Goddijn] A. Goddijn: Cabri geeft oude meetkunde tweede jeugd. In: Experimentele Wiskunde, Vakantiecursus CWI, 2001.
[Johnson] R.A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Reprint in Dover Publications, 1960 (first publication in 1927).
[Kindt] M. Kindt: Ruimtevisioenen in Platland. Nieuwe Wiskrant, juni 1993.
[Wijdeveld] E. Wijdeveld: Nieuwe Wiskunde, deel 2, hfdst. 7. Wolters-Noordhoff, 1969.
[Yaglom] I.M. Yaglom: Geometric transformations, vol II. New Mathematical Library, nr. 21 (vertaald uit het Russisch) Random House / The Singer Company, 1968.

[Klingens] www.pandd.demon.nl/index.html - Homepage van Dick Klingens.
[Weisstein] http://mathworld.wolfram.com/ - MathWorld, een website van Wolfram, opgezet en onderhouden door Eric Weisstein, als boek en CD uitgegeven onder de titel: CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, ISBN 0-8493-1945-5, 2002.

Over de auteur

Wim Pijls (e-mailadres: pijls@few.eur.nl) werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde en informatica aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland, thans Hogeschool Rotterdam. Sinds 1984 is hij docent informatica aan de Erasmus Universiteit.

AANSLUITING VWO-WO: DRAMA OF HYPE?

[Harm Jan Smid]

Er is de laatste tijd nogal wat te doen rond de aansluiting tussen het vwo en het wo, het wetenschappelijk onderwijs. Recente artikelen in *Euclides* en de *Nieuwe Wiskrant* en discussies in de *WiskundE-brief* handelen hierover, op het congres van het Wiskundig Genootschap was een hele zaterdagochtend aan aansluitingsproblemen gewijd en toen Rotterdams wiskundige Fons van Engelen - docent van het jaar aan de EUR - vorig jaar in de *NRC* geïnterviewd werd, ging een fors deel van dat gesprek ook al weer over die aansluitingsproblemen. Dat is overigens helemaal niet een tot Nederland beperkt verschijnsel. In januari 2004 publiceerde S. Klymchuk de resultaten van een enquête onder 63 universitaire docenten wiskunde - waaronder schrijvers dezes - uit letterlijk de hele wereld onder de titel *Reducing the gap between the school and university mathematics*. Een kenmerkende zin uit het artikel is: 'Many university lecturers feel that there is a need to investigate the ways of reducing the gap between the school and university mathematics.' Er is dus heel wat onrust.

In dit artikel beperk ik mij tot de aansluiting vwo-wo, want die problematiek kan ik op grond van ervaringen uit het verleden, leraar wiskunde en lerarenopleider, en mijn huidige functie, directeur interfacultair onderwijs aan de TU Delft, goed overzien. Ik bekijk daarbij de aansluiting TU-breed; het gaat dan om zo'n tweeduizend eerstejaars en ik heb niet speciaal de wiskundeopleiding met zo'n 35 eerstejaars op het oog. Gezien mijn huidige functie bekijk ik het geheel natuurlijk vooral vanuit universitair standpunt, maar ik hoop al te opvallende beperktheid van blik te vermijden. Ik ben me er verder van bewust dat ook de aansluiting havo-hbo en mbo-hbo bepaald niet zonder problemen is, maar op dat gladde ijs begeef ik me hier niet.

Wat is nu eigenlijk het probleem?

Het is niet moeilijk rond de aansluitingsproblematiek van alles overhoop te halen. Ik denk ook wel eens dat menigeen de neiging heeft stukjes onvrede over prestaties van studenten die zij of hij al heel lang koestert, nu opeens uit te vergroten en bij dit probleem onder te brengen. Laat ik daarom proberen concreet te blijven en *die* terreinen in kaart proberen te brengen waarop aansluitingsproblemen denkbaar zijn.

Werkvormen

De gedachte achter het *studiehuis* is dat leerlingen meer zelfstandig leren, minder contacturen hebben, meer zelfstudie plegen. Dat is misschien ook het deel van de recente onderwijsvernieuwingen dat het minst door wiskundeleraren gewaardeerd wordt, want de discussie in de WiskundE-brief over het aantal contacturen is schier onbegrensd. Toch is dit natuurlijk een verandering die wel degelijk zou moeten aansluiten bij wat er op het wetenschappelijk onderwijs gebeurt. En zo nu en dan hoor je dan ook wel eens een wo-docent die beaamt dat de huidige generatie studenten met zelfstandig leren beter kan omgaan dan vroeger. Dat dit toch zo weinig opvalt, komt denk ik door twee zaken. In de eerste plaats is de overgang van vwo naar wo nu eenmaal in psychologisch en organisatorisch opzicht heel groot. Heel wat studenten hebben een flinke periode nodig voordat ze alles weer op orde hebben en een goed studiegedrag hebben ontwikkeld. Gezien het hoge tempo en de volle programma's op het wo is het dan voor een aantal al te laat: ze lopen hun achterstanden niet meer in, verliezen hun motivatie en verlaten de universiteit. Natuurlijk is dat ook een vorm van aansluitingsproblematiek, maar die is al veel ouder en heeft met wiskundeonderwijs niet veel te maken. Er is nog een ander probleem. Op een instelling als de TU krijgen we bij alle opleidingen in overgrote meerderheid leerlingen met een N&T-profiel binnen. Dat zijn vaak de beste leerlingen van het vwo. Maar juist die leerlingen zijn er nogal eens aan gewend geraakt op school in de zelfwerkzaamheid alles af te krijgen (af te raffelen, zullen anderen zeggen) en zijn er juist niet aan gewend thuis nog wat aan wiskunde te doen. Daaraan ontkom je op de universiteit vrijwel

niet, en daar heeft menigeen grote moeite mee. Op mijn eigen universiteit geven we bij alle opleidingen in het eerste jaar het wiskundeonderwijs nog alleen maar in kleine groepen. Die lijken sprekend op een schoolklas van zo'n 20 jaar geleden: er wordt nieuwe theorie besproken, er worden door de studenten wat sommetjes gemaakt, en de rest wordt als huiswerk opgegeven en zonodig nabesproken. Deze klasvorm sluit goed aan bij school, maar er is wel een duidelijk verschil met de praktijk in veel klassen van vandaag de dag, waar zelfwerkzaamheid het laatste en enige woord is. De docent is op de universiteit veel nadrukkelijker aanwezig en het tempo ligt veel hoger. Ongetwijfeld zullen een aantal leerlingen hierbij aansluitingsproblemen ervaren. Het is moeilijk in te schatten hoe zwaar al deze problemen wegen. Het lastigste is, studenten die dat voor de exacte vakken niet gewend waren thuis aan het werk te krijgen. Maar de suggestie dat er nu, sinds de studiehuisgeneratie, heel andere studenten binnenkomen dan vroeger lijkt mij toch overdreven.

Lesmateriaal

Toen ik een wiskundedocent uit het voortgezet onderwijs die ik persoonlijk ken wat TU-breed gebruikte leerboeken bracht, werd hij zeer enthousiast. 'Had ik die vroeger maar gehad!', was zijn reactie. Niet alleen in de boeken op school, ook in de boeken op de universiteit is veel veranderd. Het zijn dikke, kleurige Amerikaanse boeken, met uitvoerige uitleg en voorbeelden, boordevol toepassingen, projecten, opdrachten voor de grafische rekenmachine, computerlabs, historische uitwijdingen en wat niet al. Ik merk wel eens dat daar op scholen weinig over bekend is; menig wiskundedocent schijnt te denken dat op de universiteiten nog dezelfde dictaten in gebruik zijn als 20 jaar geleden. Daar is geen sprake van. Toegegeven, er zijn heel wat universitaire docenten die in hun hart deze moderne boeken verafschuwen, maar in de praktijk worden ze inmiddels bij alle opleidingen gebruikt. Bij enquêtes reageren eerstejaars studenten dan ook meestal heel tevreden op dit materiaal.
Er is wel één belangrijk verschil. In leerboeken voor het voortgezet onderwijs wordt de theorie vaak in de opgaven ontwikkeld en wordt de leerling aan het handje van de ene som naar de andere geleid. Dat gebeurt in deze boeken niet. Theorie en opgaven zijn duidelijk gescheiden. Daar zit misschien wel een probleem: veel leerlingen zijn niet gewend zelf een stuk theorie te bestuderen, zij focussen vaak direct op de sommen. Bij een schoolboek lukt dat door de opbouw dan vaak nog wel, bij de op de universiteit gebruikte boeken niet.

Vaardigheden en hulpmiddelen

Daar zijn ze dan: de grafische rekenmachine en het formuleblad. Het is waar, daar is op veel universiteiten zuinig op gereageerd. Veel research-wiskundigen gebruiken programma's als *Maple* en *Matlab* en vinden het werken met de GR maar geknoei en gepriegel. Anderen reageerden net als docenten vroeger in het voortgezet onderwijs op de gewone rekenmachine: als we dat toestaan, waar blijven we dan? Inmiddels zijn de gemoederen rond de GR wel wat gekalmeerd. Bij al ons onderwijs en tentamens mag een machine die op het eindexamen is toegestaan, gebruikt worden, behalve bij multiple choice tentamens (ja, die gebruiken we soms; nee, ik deel de vooroordelen daartegen niet). De kwestie is wel dat we er eigenlijk niet zoveel emplooi voor hebben. Bij de analyse zoals we die op de universiteit geven, heb je niet zo heel veel aan zo'n ding (wel aan een machine met CAS, computeralgebra, maar dat is nog niet actueel). Bij lineaire algebra experimenteren we nu met het gebruik van de GR vooral bij veegprocessen. Het toelaten van de GR heeft voorlopig vooral psychologische betekenis: een student zonder zo'n ding in handen vertoont akelige ontwenningsverschijnselen.
Veel merkwaardiger vind ik het fenomeen formulekaart (ik zou zo graag willen weten wie dat bedacht heeft). De GR is ontegenzeggelijk een vooruitgang en ik vind het onzin zoiets te verbieden. Maar een formulekaart had 100 jaar geleden ook ingevoerd kunnen worden, waarom dan nu? Als je een formulekaart wilt, moet die die zaken bevatten die je inderdaad niet uit het hoofd hoeft te weten maar incidenteel wel eens nodig hebt. Voor het voortgezet onderwijs kun je dan denken aan zaken als de regels voor $\sin(a + b)$ en $\sin p + \sin q$, of bepaalde formules uit de kansrekening, maar natuurlijk niet $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ of de stelling van Pythagoras.
Bij de eerstejaars analysetentamens hanteren we inmiddels, na veel discussies, een simpel formuleblad dat zowel wat eenvoudige zaken als wat ingewikkelder regels bevat. Studenten raken nu eenmaal van streek bij de gedachte dat ze het zonder moeten doen. Maar blij met de huidige ontwikkeling dat nu ook juist basiskennis niet meer bekend wordt verondersteld, zijn we niet.
Natuurlijk zijn vaardigheden, evenals feitenkennis, geen doel in zichzelf. Het optellen van twee breuken is in zekere zin een kunstje, net als het foutloos kunnen differentiëren. Maar terwijl het eerste inderdaad niet zo vreselijk belangrijk meer is, is het voortdurend fouten maken bij het laatste uitermate storend. Als je de kettingregel opneemt op een formuleblad, suggereer je dat je die wel kunt opzoeken als je die nodig hebt. Maar zo werkt het niet: als je die kettingregel niet geautomatiseerd hebt, denk je er niet eens aan die op te zoeken, laat staan toe te passen. Het effect is dat zowel uitleg van de docent als oplossingsproces van de student vastloopt op onbegrip of fouten die eigenlijk niets met het onderwerp zelf te maken hebben.
Niets nieuws, zult u zeggen. Al in 1975 immers verscheen de bundel *Vaardigheden* van Joop van Dormolen, uitgegeven door NVvW, kennelijk omdat er aan die vaardigheden iets schortte. Het

aardige daarvan is dat deze bundel ook verscheen na een grote leerplanwijziging, die van 1968. Het verschijnen van die bundel werd ondermeer daarmee gemotiveerd dat veel leraren daardoor niet meer zouden kunnen steunen op 'nuttige onderwijstradities' en daardoor onzeker zouden zijn over wat nu wel en niet geleerd zou moeten worden. Misschien is dat nu ook wel een beetje zo.

Grenzen aan de universitaire vrijheid

De vraag is natuurlijk gerechtvaardigd waarom de Nederlandse universiteiten zich niet volledig aanpassen aan de ontwikkelingen op het vwo. Maar zo simpel ligt dat niet. Nog afgezien van het feit dat je universitaire wiskundigen moeilijk het recht op een eigen visie op het vak kunt ontzeggen, speelt ook nog iets anders. Het overgrote deel van het universitaire wiskundeonderwijs is niet bestemd voor wiskundigen, maar is zogenaamd serviceonderwijs voor andere opleidingen: natuurwetenschappen, ingenieursopleidingen, economie. In essentie is dat onderwijs op bestelling: de opdrachtgever (de opleiding Werktuigbouwkunde, om een voorbeeld te noemen) betaalt en bepaalt uiteindelijk ook wat voor wiskunde er gegeven wordt.

Nu gaat dat meestal gelukkig in goed overleg en zijn opleidingen als regel bereid de specifieke deskundigheid van wiskundigen te respecteren, maar dan toch wel binnen de door hen gestelde grenzen. Binnen de universitaire wereld betekent dat in verreweg de meeste gevallen dat zo'n opleiding een aantal duidelijk omschreven en herkenbare wiskundevakken afneemt, waarin een helder geheel aan begrippen, vaardigheden en technieken wordt onderwezen, bruikbaar in de rest van de opleiding. Het liefst moeten die vakken vergelijkbaar zijn met wat elders in de wereld op vergelijkbare opleidingen wordt onderwezen (opleidingen aan de TU worden ook internationaal geaccrediteerd), vandaar ook de voorkeur voor Amerikaanse boeken die wereldwijd gebruikt worden. Zo is het analyseboek van de TU Delft niet alleen het meest gebruikte boek in Nederland, maar ook in Australië!

Dat het wiskundeonderwijs op de TU's 'onderwijs op bestelling' is, heeft nog meer gevolgen. De gang van zaken rond wiskunde-B2 kan dat illustreren. Dat vak werd dan wel op aandrang van 'de' technische universiteiten verplicht gesteld, maar die universiteiten verwoordden hier het standpunt van wiskundigen die dat wel een leuk vak vonden. Dat is het ook: vooral voor toekomstige wiskundestudenten, niet meer dan een paar procent van de hele populatie. Toen de technische opleidingen, waar zo'n 95% van de studenten instromen, er achter kwamen dat voor hun opleidingen ingangseisen werden gesteld die voor die studies eigenlijk niet relevant waren, was het gauw gebeurd: natuurlijk herzagen de CvB's toen hun standpunt. Daarmee is niet gezegd dat zo'n vak op school geen plaats kan hebben, maar het heeft geen zin zoiets als verplichting door te voeren als er bij de afnemers geen behoefte aan bestaat.

Er is nog een gevolg. De dikke Amerikaanse boeken die op de universiteiten gebruikt worden, staan dan wel vol met toepassingen, maar in het basisonderwijs wiskunde op de TUD spelen die maar een ondergeschikte rol. Een afnemende opleiding zit er als regel niet op te wachten dat wiskundigen zich op allerlei toepassingen op hun vakgebied storten en dat in hun onderwijs gaan verwerken, of dat het wiskundeonderwijs overwegend in projecten en dergelijke wordt vormgegeven. Voor het eerste zijn ze als regel zelf veel competenter, en als ze in hun opleidingen projecten, onderzoekswerk e.d. opnemen, doen ze dat ook liever op hun eigen vakgebied. Dit binnen wiskunde te doen zou veel tijd kosten en duur zijn en al gauw ten koste gaan van de internationaal zo ongeveer vastliggende leerstof. Voor dat alles voelen onze afnemers niet veel. Dat is op de de Universiteit Twente en de TU Eindhoven niet veel anders, en dat is eigenlijk over de hele wereld zo. Op het onvolprezen internet zijn heel veel wiskundetentamens van heel veel universiteiten over de hele wereld te bekijken. Niet alleen gebruiken die vaak dezelfde boeken als in Nederland, ook de tentamens zijn meestal niet essentieel anders.

Het wiskunde-serviceonderwijs op de universiteiten is daardoor meestal, zeker in het eerste jaar toch, ondanks de gebruikte boeken, toch in hoofdzaak 'kaal' en tamelijk traditioneel gebleven.

Op de universiteiten kunnen niet zo maar alle ontwikkelingen op het vwo naar meer toegepast, realistisch of onderzoekend onderwijs gevolgd worden; daar stellen onze klanten geen prijs op. De eindexamens wiskunde-B1 en -B12 zijn de afgelopen jaren echter steeds meer toegepast en 'aangekleed'. In dit opzicht is er dus een duidelijk verschil gegroeid.

Tussenstand

Laat ik beginnen met op te merken dat ik vind dat de problemen niet overdreven moeten worden. Toegegeven, ik verval ook wel eens in vertwijfeling als ik bij mijn onderwijs alleen maar verbaasde gezichten zie als ik gebruik dat $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, maar na een poosje weten de meesten dat toch ook wel weer. En soms, als ik weer het zoveelste schrijven, memorandum, e-mail of artikel onder ogen krijg waarin dringend aan mij gevraagd wordt of ik de acute noodsituatie en het volstrekte falen van de universiteiten rond de aansluitingsproblematiek wel besef, verzucht ik ook wel: wat een *hype* is dit toch geworden.

Op veel universiteiten, de een wat meer dan de ander, is de afgelopen jaren heel wat gebeurd. Programma's zijn aangepast aan de huidige eindexamenprogramma's, er worden heel andere boeken gebruikt, en er ligt minder nadruk op allerlei weetjes en ingewikkelde vaardigheden. Massacolleges geven we niet meer. We beginnen dit jaar TU-breed met een diagnostisch toetsje waarmee allerlei basisvaardigheden en kennis van school nog eens nagevraagd worden. We hebben daarbij geleerd van kritiek vanuit het vwo op vorige versies

van zo'n toets: we stellen alleen vraagjes die zo uit de schoolboeken komen en die voor het vervolg ook echt relevant zijn. We helpen beginnende studenten daarmee de relevante voorkennis op te rakelen: een aanpak regelrecht uit het didactisch handboek. Verder is op een aantal universiteiten, waaronder de TUD, een wiskundedocent van het vwo tijdelijk in dienst genomen om nog eens extra op de aansluiting te letten.
Natuurlijk wordt er nog heel wat geklaagd (dat zal in veel lerarenkamers niet anders zijn), maar vergeleken met de beschrijvingen van sommig buitenlands universitair onderwijs uit het hiervoor genoemde rapport van Klymchuk hebben de Nederlandse universiteiten zich bij hun wiskundeonderwijs behoorlijk aangepast. De kloof is zeker geen *Grand Canyon*. Maar die kloof is denk ik wel wat groter geworden, en iedere student die daardoor mislukt is er een teveel.

Hoe nu verder?

Ook al vind ik de 'ramp' dus wel wat meevallen, en vind ik de aansluitingsdiscussie wel iets van een *hype* hebben, het zou heel wat beter zijn als de kloof tussen vwo en wo niet de neiging had te groeien, maar juist kleiner zou worden. Dat zal niet vanzelf gaan. De ontwikkelingen binnen het vwo hebben hun eigen dynamiek, en het onderwijs op het wo heeft zo zijn eigen wetten.
Er is een geluk bij een ongeluk. Er komt, alweer, een nieuw programma. Dat betekent ook nieuwe boeken, nieuwe eindexamens, en ook een kans voor nieuwe accenten. Om die kans te grijpen wil ik pleiten voor het volgende.

De universiteit moet aanvaarden dat het vwo méér is dan *voorbereidend wetenschappelijk onderwijs*, en dus ook recht heeft op een eigen visie op het onderwijs dat ze verzorgt. Het vwo is er niet voor om de leerlingen zo goed mogelijk voor te bereiden op het eerste deeltentamen analyse van het eerste jaar. Aan de andere kant: het vwo moet accepteren dat het óók *voorbereidend wetenschappelijk onderwijs* is, en dus ook voor die voorbereiding een verantwoordelijkheid heeft. De gedachte dat het wiskundeonderwijs op het vwo volledig autonoom is en dat iedereen zich daaraan maar moet aanpassen, is evenmin houdbaar. Het verzwakt bovendien uiteindelijk de positie van het vak.

De aansluitingsproblematiek moet een gemeenschappelijke verantwoordelijkheid zijn van beide partijen: wo respectievelijk vwo. Ik zou er bij het bestuur van de NVvW op willen aandringen stappen te ondernemen om de band tussen voortgezet en hoger onderwijs beter te structureren. Daar komt nu nog onvoldoende van terecht. Voor een beroepsvereniging van docenten in het voortgezet onderwijs zou de vraag hoe hun onderwijs aansluit bij het vervolg, of dat nu onderwijs of beroep is, als vanzelfsprekend een 'voorwerp van aanhoudende zorg' moeten zijn, om de grondwet eens te parafraseren. Ik heb niet de indruk dat dat idee binnen de NVvW erg leeft.
Er ligt een notitie van de havo/vwo-werkgroep, maar de wel heel algemeen gestelde oproep aan de leden van de vereniging om commentaar vind ik erg vrijblijvend. Er bestaat binnen de NVvW ook een hbo-werkgroep. Kan die niet gevraagd worden op zo kort mogelijke termijn commentaar op die notitie te geven, juist vanuit het standpunt van de aansluitingsproblematiek? En het moet toch ook mogelijk zijn om binnen de universiteiten een groepje docenten te vinden die zowel sympathie en begrip hebben voor wat er op het vwo leeft, maar óók dagelijks ervaring hebben met wat er op het wo voor de grote meerderheid van de studenten nu eenmaal wenselijk is, die hetzelfde kunnen doen?

Slot

De NVvW heeft volgens haar eigen website luid geprotesteerd tegen de plannen van de minister, maar 'het lijkt erop, dat zij niet naar de mensen in het veld wil luisteren'. Het verhaal gaat zelfs dat men op het ministerie zelf maar nieuwe programma's in elkaar gaat knutselen. Het is jammer, maar kennelijk moet je constateren dat de invloed van de beroepsgroep op dit moment niet zo groot is. Met alleen maar boos worden op de minister komen we echter niet veel verder. Het opstellen van de notitie *Herijking* is een stap in de goede richting om het initiatief terug te krijgen. Het lijkt me van groot belang ook het afnemende veld daarbij op een niet-vrijblijvende manier te betrekken en daarmee een consensus te bereiken welke kant het uit moet. Dat kan de positie van het wiskundeonderwijs op het voortgezet onderwijs op termijn alleen maar ten goede komen.

Over de auteur

Harm Jan Smid (e-mailadres: H.J.Smid@ewi.tudelft.nl) is wiskundeleraar en lerarenopleider geweest. Sinds vijf jaar is hij Directeur Interfacultair Onderwijs aan de TU Delft en daarmee verantwoordelijk voor het wiskundeonderwijs dat aan de technische opleidingen gegeven wordt.

VAN EXPERIMENTEREN NAAR IMPLEMENTEREN, DEEL 2

Ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs

[Martin van Reeuwijk en Peter van Wijk]

De balans opmaken

Dit is het tweede deel in een serie over de ontwikkelingen van ICT in het wiskundeonderwijs. In het eerste deel[1] werden de ontwikkelingen van ICT in relatie tot het wiskundeonderwijs van de laatste 15 jaar geschetst. Nu wordt de balans opgemaakt; in het laatste deel staan implementatie, didactische aspecten en de toekomst centraal.
We hebben in het eerste artikel ruim 15 jaar ICT-ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs geschetst. Wat is er van terecht gekomen en wat is overgebleven van de diverse experimenteer- en ontwikkelactiviteiten? In dit artikel geven we een beeld van wat volgens ons de belangrijke opbrengsten van de afgelopen 15 jaar zijn.

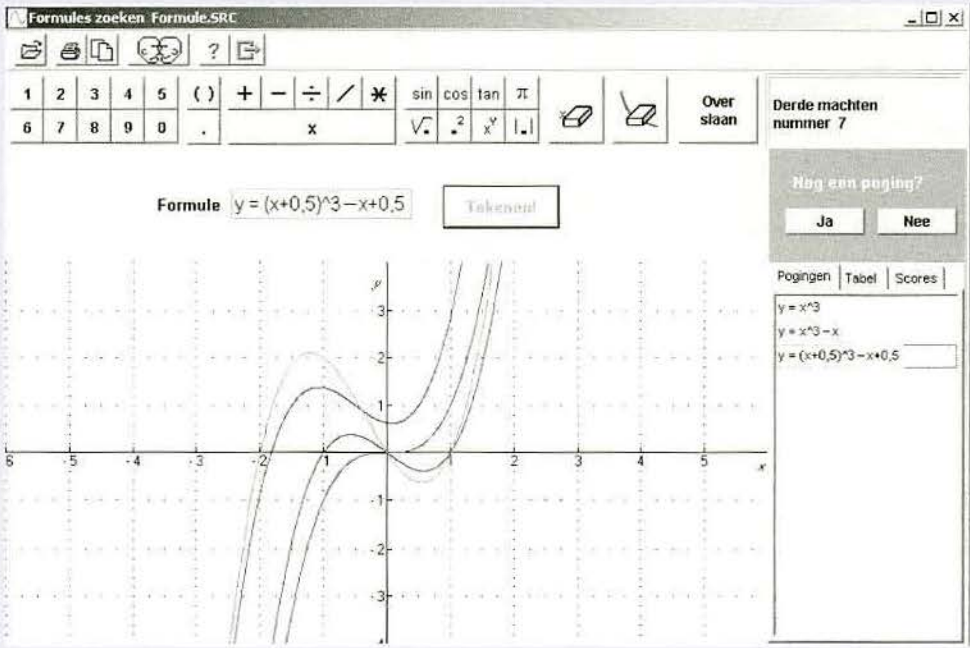
VU-Grafiek en VU-Stat

Eén van de eerste populaire grafiekenteken-programma's is *VU-Grafiek*, gestart in het MsDos-tijdperk. Het programma *VU-Grafiek* is voortgekomen uit ontwikkelingen in Engeland onder aanvoering van David Tall. Piet van Blokland, Douwe Kok, Carel van de Giessen en anderen hebben de ontwikkeling in Nederland doorgezet. Dit programma heeft de tand des tijds doorstaan en heeft zich ontwikkeld tot een zeer krachtig programma met veel didactische en onderwijskundige mogelijkheden. De Windows-versie (zie figuur 1) wordt met verschillende wiskundemethoden meegeleverd op CD-rom.
VU-Grafiek is op dit moment opgesplitst in een onderbouwversie *VU-Grafiek Basisvorming* en *VU-dif* voor de bovenbouw met specifieke onderdelen als differentiaalvergelijkingen, hellingfuncties en oppervlaktefuncties.

Waar vroeger, door de tijdrovende berekeningen, statistiek op school niet wezenlijk tot zijn recht kon komen is dat nu, dankzij computers, verleden tijd. Met *VU-Stat* kunnen leerlingen met grote databestanden werken en kan er echte statistiek bedreven worden.
VU-Stat heeft zich in de loop der jaren ontwikkeld tot een krachtig programma zowel geschikt voor onder- als bovenbouw. VU-Stat voor Windows is in 2000 beschikbaar gekomen.

Ruimtemeetkunde: Doorzien en Cabri

Een ander voorbeeld van een continue ontwikkeling is die van de ruimtemeetkundesoftware. Grote internationale pakketten als *Cabri* en *Sketchpad* bestaan nog steeds, kunnen steeds meer en zijn steeds eenvoudiger te bedienen. In Nederland begon het met *RuimFig* (zie figuur 2) en de eerste versie van *Doorzien*, beide ontwikkeld in het PRINT-tijdperk. De twee programma's zijn samengevoegd en de ontwikkeling van *Doorzien versie 3* (voor Windows; zie figuur 3) was een gezamenlijk traject van de Fontys hogeschool en het Freudenthal Instituut. EPN[2] heeft geld gestoken in deze ontwikkeling en *Doorzien* opgenomen in de methode *Getal en Ruimte*.
Visiria heeft ook een aantal meetkundepakketten uitgegeven. Een veelgebruikt pakket dat veel meer mogelijkheden biedt dan alleen (ruimte)meetkunde



FIGUUR 1 De Windowa-versie van VU-grafiek

is *Geocadabra* van Ton Lecluse, inmiddels ook in het buitenland in gebruik.
Cabri is een interactief meetkundeprogramma (zie figuur 4) dat kan helpen bij redeneren, bewijzen en exploreren van meetkundige situaties, met name geschikt voor vwo-5/6, N&T-profiel. Dit is geen programma dat speciaal voor het Nederlands onderwijs is ontwikkeld, zoals de VU-programma's en *Doorzien*, maar het heeft in het Nederlands wiskundeonderwijs wel een ontwikkeling doorgemaakt.
De volgende generatie ruimtemeetkundesoftware bestaat uit applets. Op bijvoorbeeld het WisWeb staan vele applets die heel veel kunnen dat *Doorzien* ook kan. *Doorzien versie 4* is zelf ook een applet dat via het internet kan draaien (figuur 5).

Grafische Rekenmachine en ComputerAlgebraSystemen (CAS)

De grafische rekenmachine is een bijzonder ICT-geval. Door het praktische formaat heb je het apparaat – in tegenstelling tot een computer – altijd bij de hand. Net als bij de 'gewone' rekenmachine zijn er vele interessante discussies gevoerd over het wel of niet toelaten van een grafische rekenmachine op het examen: wat moeten leerlingen nog wel en niet zelf met de hand kunnen? Deze discussie is van alle tijden en zal bij de invoering van elke nieuw (ICT) onderwijsmiddel worden gevoerd. De mogelijke invoering van nieuwe technologie dwingt het onderwijsveld tot reflectie en herbezinning op doelen en inhoud. De ervaring heeft geleerd dat ontwikkelingen niet zijn tegen te houden, maar dat het zeker de moeite loont om goed uit te zoeken hoe je zo'n nieuw middel op een goede manier in het onderwijs kunt inzetten.
De rekenmachine is inmiddels heel gewoon geworden. Je krijgt al eenvoudige rekenmachines cadeau die je aan je sleutelbos kunt hangen. De grafische rekenmachine is ook al ingeburgerd in de Tweede fase. Ook bij andere vakken (natuurkunde, scheikunde, economie) mag het apparaat bij de examens gebruikt worden.
Een volgende stap is die naar een symbolische rekenmachine met computeralgebra[3] zoals *Derive* en met meetkunde zoals *Cabri*. Paul Drijvers heeft in zijn promotieonderzoek geconstateerd dat ComputerAlgebraSystemen mogelijkheden bieden voor het voortgezet onderwijs, maar dat dat weer andere moeilijkheden met zich meebrengt. Leerlingen moeten ook leren denken in de taal van het apparaat of het computeralgebrasysteem. Het roept de vraag op hoeveel tijd je mag gebruiken om leerlingen te leren met een pakket om te gaan. Wellicht is de gevraagde investering te groot voor de opbrengst die het werken met een huidige CAS voor leerlingen in havo en vwo oplevert. In het laatste artikel zullen we dieper ingaan op de didactische (on)mogelijkheden van dit type softwarepakketten.

Internet

Minder discussie is er over het gebruik van internet en diensten en programma's (applets) die via internet beschikbaar zijn voor het onderwijs. Thuis

beschikken veel leerlingen en docenten over internet en dat verhoogt de acceptatie en het gebruik. Met internet kun je de actualiteit veel makkelijker in het onderwijs halen en daarmee kan het onderwijs voor leerlingen betekenisvoller en inzichtelijker worden.
Internet kan op verschillende manieren in het onderwijs gebruikt worden. We gebruiken de indeling van Van Reeuwijk, Doorman en Koolstra (1999) als basis en gaan daar op verder.
- Je kunt het internet als een verzameling plaatsen (websites) beschouwen waar kant-en-klaar onderwijs is. Leerlingen kunnen naar zo'n plaats en gaan direct aan de slag. Als docent hoef je verder niet veel te doen. Leerlingen (en ook docenten) kunnen on-line leren en cursussen volgen.
- Daarnaast zijn er websites waar je onderwijs kunt halen. Internet is een distributiekanaal en een organisatie- en presentatiemedium voor oefenstof, lessenseries, werkbladen, praktische opdrachten, proefwerken, applets, software, Webquests, enzovoort. Het verschil met kant-en-klaar onderwijs is dat een docent vaak nog iets moet doen met de materialen voordat leerlingen er mee aan de slag kunnen. Een docent past de materialen aan zijn eigen situatie aan of maakt een selectie voor eigen gebruik.
- Behalve de onderwijswebsites waar onderwijs is of waar je onderwijs vandaan kunt halen, zijn er op het internet heel veel bronnen te vinden waarmee je onderwijs kunt maken. Internet functioneert dan als een bibliotheek, als een informatie- en inspiratiebron.
- Voor de docent (maar ook leerling) is internet te gebruiken als medium waarmee je op de hoogte kunt blijven. Actuele informatie over conferenties en cursussen en over ontwikkelingen in de wiskunde en het wiskundeonderwijs is makkelijk toegankelijk. De website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (*www.nvvw.nl*) is een mooi voorbeeld van een plaats met actuele informatie over en voor het wiskundeonderwijs.
- Tenslotte is internet ook een communicatiemiddel. Dankzij e-mail, elektronische nieuwsbrieven (zoals de WiskundE-brief), discussieplatforms en instant messaging (bijvoorbeeld *ICQ, MSN, YahooMessenger*) hoef je je huis niet meer uit om toch snel met anderen te kunnen communiceren en informatie uit te wisselen. Via de wiskundevraagbaak *Wisfaq* (*www.wisfaq.nl*) kunnen leerlingen allerlei vragen over wiskunde stellen.
- Daarnaast zijn er nog vele digitale toetssystemen zoals bijvoorbeeld QuestionMark Perception, Testvision, Examiner en WinToets. Verder zijn er allerlei elektronische leeromgevingen (ELO) zoals Blackboard, Teletop, N@tschool, Moodle, die de mogelijkheden aan het onderzoeken zijn om deze tools daadwerkelijk in te zetten binnen het onderwijs[4].

Veel organisaties bieden een mengeling aan van de verschillende internetdiensten, elke zichzelf respecterende organisatie, school of persoon heeft tegenwoordig wel een website. Ook de wiskundemethoden hebben allemaal hun eigen methodesite. Voor het wiskundeonderwijs zijn de meeste niet-commerciële websites te bereiken via *www.wiskundeonderwijs.nl*.

Grijp je kans

Alle methoden leveren tegenwoordig een cd-rom bij de boeken met software (waaronder applets), oefenopgaven, diagnostische toetsen. Er is nascholing rond het gebruik van ICT in de vorm van cursussen en conferenties. De jaarlijkse wiskunde- en ICT-conferenties zijn een voorbeeld van een manier waardoor je op de hoogte kunt blijven van de laatste ontwikkelingen. Er zijn veel websites die ondersteuning geven in de vorm van ideeën, het ontwerpen van opdrachten en direct bruikbare lesmaterialen. De techniek is betrouwbaarder en sneller geworden. De leerling benut ICT in allerlei facetten bij het aanpakken en oplossen van problemen, hij ziet het als een vanzelfsprekend, natuurlijk hulpmiddel.
Kortom, genoeg randvoorwaarden zijn vervuld, niets staat de docent meer in de weg om ICT een plaats te geven binnen het wiskundeonderwijs. Grijp je kans!

Noten

[1] M. van Reeuwijk, P. van Wijk: Van experimenteren naar implementeren. In: Euclides 2 (80), oktober 2004, pp. 52-58.
[2] EPN is Educatieve Partners Nederland en uitgever van Getal & Ruimte.
[3] Voorbeelden van computeralgebrapakketten zijn MathCad, TI-interactive, Studyworks, Scientific Notebook, Maple, Mathematica, Mupad, Derive. Via de sites van de betreffende pakketten kan vaak een gratis demo-versie worden gedownload.
[4] Zie bijvoorbeeld de site van het CITO waar uiteen gezet wordt hoe de computer in de diverse onderdelen van het toetsen kan worden ingezet (www.citogroep.nl/exp/ict/eind_fr.htm).

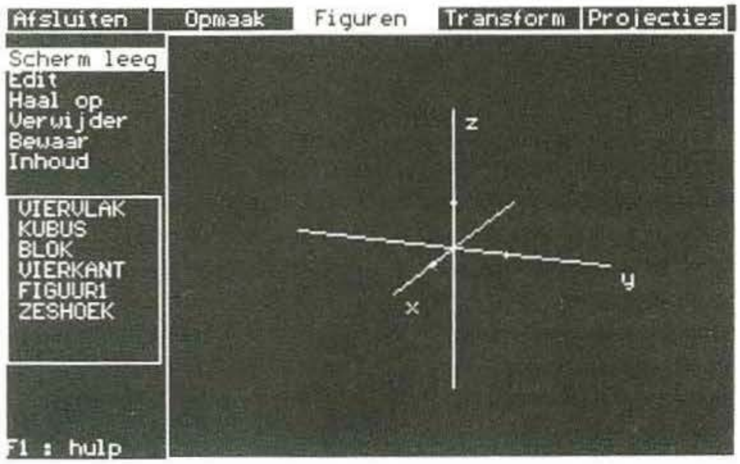
Referenties

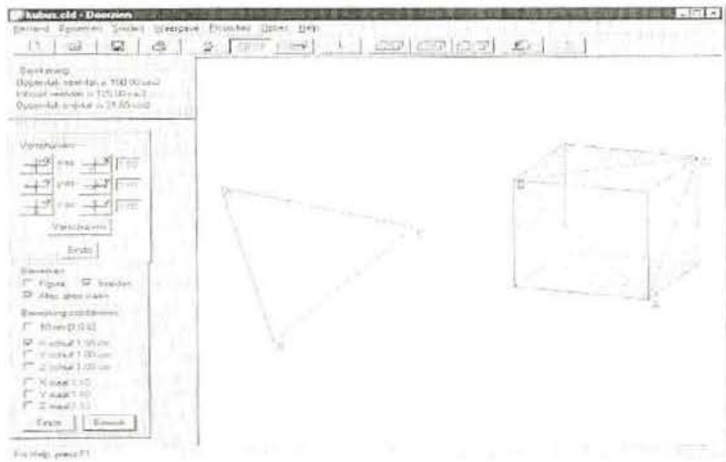
Zie voor referenties de NVvW-site, www.nvvw.nl/euc802ref.html.

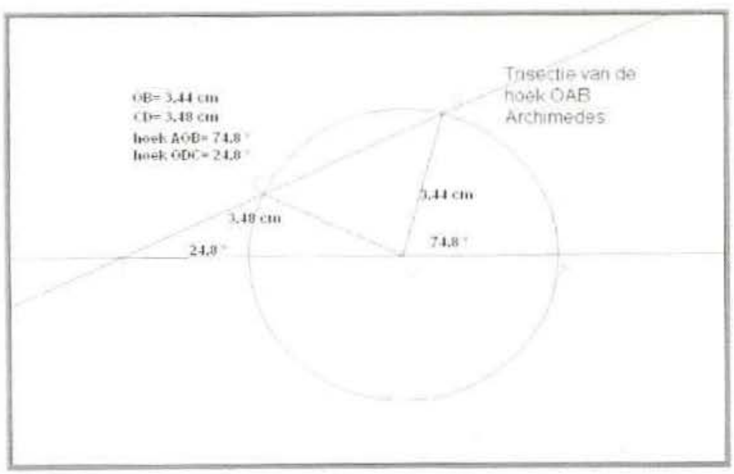
Over de auteurs

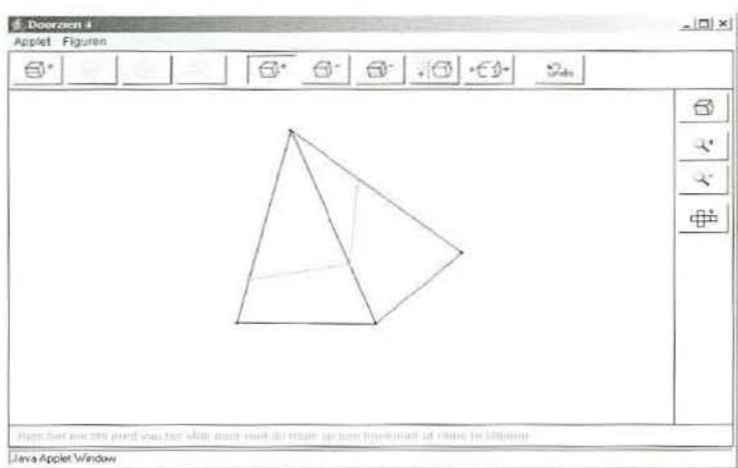
Peter van Wijk (e-mailadres: p.vanwijk@aps.nl) is wiskundedocent aan College de Klop in Utrecht. Hij is daarnaast werkzaam bij het APS als pedagogisch-didactisch medewerker rondom wiskunde en ict&leren.
Martin van Reeuwijk (e-mailadres: M.vanreeuwijk@fi.uu.nl) werkt bij het Freudenthal Instituut. Zijn interesses liggen op het gebied van de algebra, toetsen en technologie. Martin was onder andere projectleider van de ICT-projecten WisWeb en WELP.
Beiden zijn de initiatiefnemers van de ICT-conferentie voor het wiskundeonderwijs die inmiddels vier keer heeft plaatsgevonden.

FIGUUR 3 Doorzien doorontwikkeld, nu in een Windows-omgeving









FIGUUR 4 Cabri, een interactief meetkundeprogramma, dat nu ook voor de TI-83 Plus en de TI-84 grafische rekenmachines beschikbaar is

BEELDTAAL

Geschikte representaties verkennen aan de hand van uitdagende situaties

[Harrie Broekman]

Vooraf

Voor het leren en gebruiken van wiskunde is het belangrijk om veelvuldig visuele representaties te hanteren[1]. Communiceren via beelden (plaatjes, diagrammen, grafieken) kan namelijk een extra ondersteuning geven bij het verwerven van zowel standaardtechnieken als het leren doorzien van wiskundige structuren.
Om het belang van visualiseren aan te geven voor het probleemoplossen in ruimere zin zullen, behalve het Kangoe-voorbeeld waaraan gewerkt werd tijdens de studiedagen van de NVvW (november 2003) en de Poolse SNM (februari 2004), nog twee andere onderwijsleersituaties beschreven worden. Daarna worden drie voorbeelden beschreven waarmee de lezer zelf kan oefenen, al dan niet met of door leerlingen.

Beeldtaal 1 - Kangoe Solitair[2]

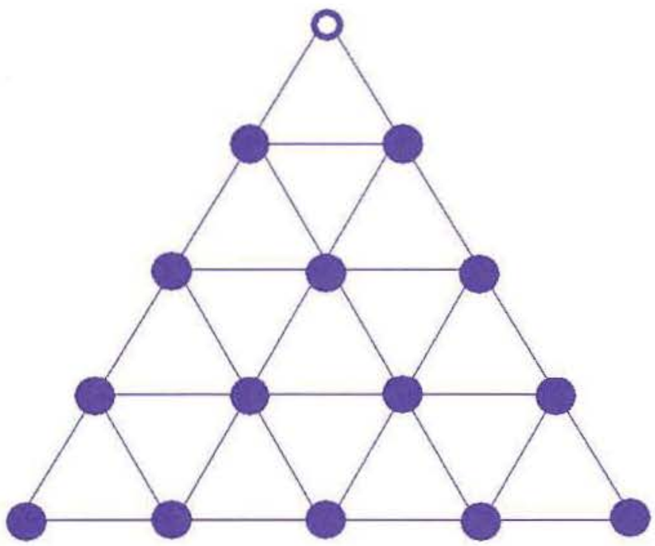
Korte spelregels: Het speelveld van Kangoe Solitair is driehoekig; zie figuur 1. Leg op elk veld een kangoe, maar laat de bovenste positie leeg. Spring steeds met een kangoe over een aangrenzende kangoe naar het veld daarachter; dat veld moet wel leeg zijn. De kangoe waar je overheen springt, neem je weg. De bedoeling is dat je uiteindelijk één kangoe overhoudt op het bovenste veld (het veld dat aan het begin leeg is).

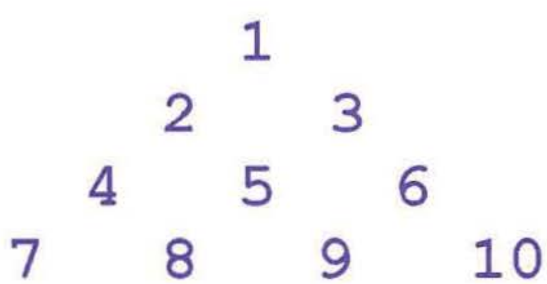
De workshops tijdens de studiedagen van NVvW en SNM startten met een 'levend' Kangoe: als fiches (kangoes) werden deelnemers geplaatst op de op de grond neergelegde 'velden'. Direct begonnen de fiches met elkaar te overleggen in sprekende taal: 'Als jij nu over mij springt dan kom jij daar en stap ik er uit', of 'Ik wil daar heen, maar dan moet hij eerst over hem heen springen', enzovoort. Vervolgens gingen de deelnemers in groepjes aan het probleem werken en kregen zij - als ze daar aan toe waren - vragen ter verdieping. Zoals we verwacht hadden, kwamen meerdere deelnemers zelf al met eigen vervolgvragen. De startvraag fungeerde daarbij als een zogenoemd 'seed problem', een probleem dat te veralgemeniseren is en zelf veel nieuwe vragen oproept.

In de Poolse workshop stonden de vijf deelnemers van de basisrij met hun rug tegen het bord. En wat deden zij? Zich omdraaien en een plaatje maken op het bord en daar getallen bij zetten. 1 bij de bovenste plaats, 2 en 3 bij de rij er onder; 4, 5 en 6 bij de volgende rij, en zo verder (zie figuur 2). Even later werden pijltjes gebruikt om de bewegingen aan te geven: van 4 om 2 heen naar 1, van 6 om 5 heen naar het nu lege veld 4, enz. De bordenwisser kwam er aan te pas om de velden waar overheen gesprongen was ook werkelijk 'leeg' te maken.
Na enige tijd werd deze manier van noteren omgewerkt naar een meer compacte en abstracte notatie:
4 →1; 6 →4; 1 →6; 7 →2; 12 →5; 10 →3; 14 →12; ...
Het plaatje dat de Poolse deelnemers maakten van de situatie en de pijltjes die ze gebruikten om bewegingen aan te geven, waren een opstapje voor de meer abstracte notatie die de 'oplossing' aangaf.

In het nagesprek tijdens de workshops werd door middel van vragen[3] duidelijk gemaakt dat een mogelijke visualisatie van een probleem niet los gezien kan worden van het totale oplossingsproces. De vraag 'Hoe noteer je een oplossing?' gaf als belangrijk commentaar dat het niet alleen gaat om het noteren achteraf, maar vooral ook om pogingen om plaatjes te maken en notaties te zoeken die gericht waren op het beter in beeld krijgen van de situatie, dus een tekening met pijlen en getallen, en dergelijke.
De vraag 'Waarom Kangoe Solitair spelen in de klas?' heeft echter meer antwoorden dan: 'Er is een natuurlijke behoefte aan een *visualisatie* en *notatie*.' Andere mogelijke antwoorden op die vraag zijn bijvoorbeeld:
- Er is een natuurlijke behoefte aan *systematiek* die versterkt kan worden.
- Om te communiceren moet je je *redenering expliciet* maken en daartoe word je bij dit spel min of meer gedwongen.
- Onderscheid leren zien tussen 'goede' en 'slechte' zetten.
- Er ontstaat min of meer een noodzaak voor een

FIGUUR 1 en 2





bewijs waarom bijvoorbeeld het spel met 7 rijen echt niet kan.
- Gebruik van *symmetrie* in redeneringen wordt 'aangeleerd'.
- Het is een *leuke puzzel.*

Beeldtaal 2 - Lotte en haar moeder Beate[4]

Een leerlinge krijgt de volgende opgave voorgelegd: *'Lotte is 8 jaar, haar moeder Beate is 38 jaar. Hoe oud is Beate als zij drie keer zo oud is als haar dochter Lotte?'*
De leerlinge denkt even na en zegt dan zoiets als: 'Het verschil is 30 en dat blijft zo, dus als Lotte hoger komt, komt haar moeder ook... Dus die 30 is twee en moeder is dus 45 jaar'.
Terwijl die leerlinge dit zegt, schetst ze op een stuk papier figuur 3. Aan de streepjes kon ze zien dat die 30 steeds opschuift.
Het gaat beslist te ver om te zeggen, dat de schets de oplossing 'aanreikte', maar deze schets hielp zeker bij het scherper 'doorzien' van de gegevens en het daaruit concluderen dat het verschil in leeftijd altijd 30 is. Bovendien was deze leerlinge daardoor niet meer aangewezen op de aloude strategie van 'probeer en verbeter'.
(Eerlijkheidshalve moeten we zeggen dat 'vertalen in een stelsel vergelijkingen' door velen mooier gevonden wordt dan het tekenen van een plaatje. Zodra je het stelsel vergelijkingen immers hebt, kun je dit stelsel oplossen zonder te hoeven denken aan Lotte en haar moeder Beate. Dat is de kracht van algebra. Maar denken aan groei/groter worden in de jaren heeft ook wel iets, zeker voor een basisschoolleerling.)

Beeldtaal 3 - Het kraaienprobleem[4]

'Een aantal kraaien gaat op de paaltjes achter mijn huis zitten, op ieder paaltje één. Er blijft precies één kraai over waarvoor geen paaltje meer is. Een moment later gaan dezelfde kraaien met z'n tweeën op een paal zitten; er is dan één paaltje waarop geen kraai zit. Hoeveel paaltjes staan er achter mijn huis?'
Een leerling reageerde als volgt: 'Als je de een door de ander deelt, is de rest 1, en als je nog een keer deelt heb je 2 tekort, dus er zijn... ja, 3 paaltjes.'
Eerlijk gezegd is het niet eenvoudig om de redenering van de leerling te volgen, maar een plaatje kan ook hier veel hulp bieden; zie figuur 4. En daarmee is het probleem, door de visuele ondersteuning, opgelost.

Oefenen met beeldtaal - vouwblaadje

Dit eerste voorbeeld voor gebruik in de klas is ontleend aan Pierre van Hiele.
Vouw een vel papier eerst horizontaal dubbel en daarna nogmaals, maar dan verticaal.
Vraag: Als je van het 'vouwhoekje' een (vierdik) stukje wegknipt, welke figuur krijg je dan te zien na het weer openvouwen van het papier?
Vouw het dichtgevouwen papier nogmaals (nu weer horizontaal), knip een hoekje af en voorspel wat je te zien krijgt als je het papier weer zou openvouwen.

Vraag: Wat is een mogelijke verklaring voor het waargenomen verschijnsel?
Vervolgvraag: Bedenk die zelf, eventueel na wijziging van de instructie.

Oefenen met beeldtaal; wiskundig golfspel

Je hebt twee golfsticks tot je beschikking; met de ene kun je per slag '3 optellen' en met de ander per slag 'met 2 vermenigvuldigen'.
Vraag: Als je begint bij het getal 2, kun je dan het getal 39 bereiken door een passende combinatie van slagen?
Een leerlinge tekende twee loodrechte assen, zette bij de horizontale as '×2' en bij de verticale '+3'. Vervolgens zette ze 2 bij de oorsprong, begon wat stippen te zetten en zei peinzend: 'Nee, bij 39 kom ik niet, maar vanaf 40 krijg ik alles...'
Opdracht: Teken een assenstelsel zoals die leerlinge en kijk of het klopt wat ze zegt.
Opdracht: Teken een 100-veld (10 bij 10, met in de bovenste rij 1, 2, t/m 10; in de tweede rij 11, 12, ...). Begin met het vakje 2 in te kleuren en vervolgens elk getal dat bereikt kan worden.
Vraag: Wat is het minimum aantal slagen waarmee je bijvoorbeeld bij 79 kunt komen als je bij 2 begint? En als je bij 5 begint? ...

Als leraar sta je voor het dilemma van het *geven* of het laten *bedenken* van een acceptabele en bruikbare representatie.
Het is een dilemma, omdat wat je ook kiest, er altijd zowel positieve als negatieve consequenties zijn. Wij als docenten weten vaak welke representatie de meest bruikbare is, omdat wij weten wat 'verder op' komt. We weten ook wat acceptabel is, omdat wij weten – althans verondersteld worden te weten – welke representaties gebruikt worden door de (internationale) gemeenschap van wiskundigen. Maar omdat we leraren wiskunde zijn, weten we ook dat onze leerlingen het *belang* van representaties moeten leren, verschillende representaties moeten leren *gebruiken*, en de juiste moeten leren *kiezen*. Soms zullen wij kiezen voor het aan de leerlingen voorschrijven van de representatie, maar het is zeker zinvol om ze ook regelmatig zelf een representatie te laten kiezen of zelf te ontwikkelen.

Oefenen met beeldtaal - stippenprobleem

Zie figuur 5. Op een gestippeld vel papier kun je een vierkant zien met 1 als de lengte van een zijde, met 4 stippen als hoekpunten en geen enkele stip 'binnenin'. Vervolgens kun je een vierkant zien met 2 als de lengte van een zijde, met opnieuw 4 stippen als hoekpunten, nu met 8 stippen op de zijden en 1 'binnenin'. Een zelfde type vierkant heeft 12 'zij-stippen' en 4 'binnenin-stippen' en met lengte zijde 3.
Vraag: Hoeveel 'zij-stippen' en 'binnenin-stippen' heeft een vierkant met lengte zijde 4? En lengte 5? En lengte 25?
Voor veel brugklasleerlingen is het niet vanzelfsprekend dat de gegevens eerst maar eens in een tabel gezet worden om een wat abstracter 'beeld' te creëren van de situatie. Ook dat moet geleerd worden! Door het in een tabel zetten kan de structuur van een probleem duidelijk worden, mede omdat hierdoor een aantal oppervlaktekenmerken van de probleemsituatie weggelaten worden.

Lengte zijde	Aantal zij-stippen	Aantal binnenin-stippen
1	4	0
2	8	1
3	12	4
4	??	??
5	??	??
...		
25	???	???
...		

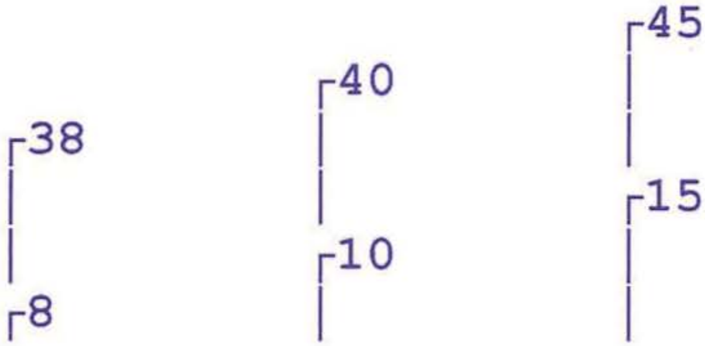
Reflectie

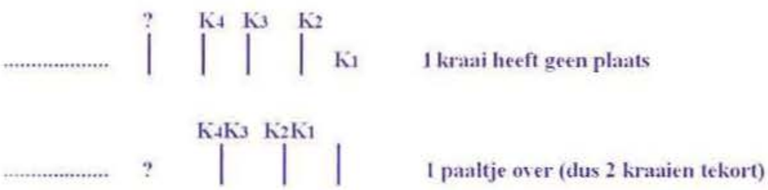
In workshops voor leraren zoals die voor de NVvW en de Poolse SNM, maar ook bij het werken met leerlingen, wordt duidelijk dat het maken van een tabel als een manier om data te organiseren (beeldtaal!) deel uitmaakt van de hedendaagse realiteit met kranten en tv-nieuwsrapportages. Het wordt daarbij telkens opnieuw duidelijk dat het, zoals bij het voorgaande voorbeeld, voor veel leerlingen en volwassenen moeilijk is om van *verticaal lezen* over te gaan naar *horizontaal lezen* van een tabel.
En dat is precies de stap van lengte 5 naar lengte 25 als je niet eerst naar 6, 7, 8, enzovoorts wilt gaan. Het is de stap van een *recursieve* naar een *functionele* of *expliciete* formule, en een verandering van focus: van een *operationele* naar een *structurele*.
Een manier om leerlingen daarbij te helpen is het expliciet bespreken van het gegeven dat dit niet eenvoudig is en dan eventueel per situatie proberen de leerling zichzelf hulpvragen te laten stellen. Het zoeken naar eenvoudige verbanden kan altijd beginnen met de vraag: 'hoeveel heb ik bij de lengte opgeteld?', of: 'met welk getal heb ik vermenigvuldigd?' Kortom: is er een eenvoudig patroon te onderkennen? Ook het herkennen van kwadraten dient daarbij tot het basisrepertoire te gaan horen. Maar vooralsnog is het benutten van een visuele representatie altijd aan te raden.
Een volgende stap is het vragen naar een mogelijke combinatie van eenvoudige patronen. Oefening in het herkennen van basispatronen of getalrelaties speelt daarbij zeker een rol, maar niet onder dwang, wel door middel van speelse uitdagingen. Proberen en controleren zijn daarbij sleutelwoorden.

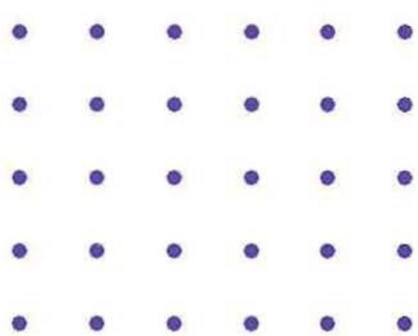
Slotopmerking

Er is een behoefte aan 'voorspellen' en 'controle', niet alleen van de kant van de leraar, maar juist ook van die van de leerling. Het is daarom van belang dat we ons blijven afvragen waar we als leraar aandacht kunnen blijven besteden aan ons streven ervoor zorgen dat de leerlingen een aantal standaardtechnieken leren die wezenlijke betekenis voor hen hebben. Een van die basistechnieken is dan

FIGUUR 3, 4 en 5







zeker de techniek van het kiezen en gebruiken van diverse methoden om situaties te visualiseren.
Als de lezer dit wil opvatten als een aanbeveling om er voor te zorgen dat de leerlingen in de loop der jaren in hun wiskundelessen een 'gereedschapskist' vullen, dan ga ik daar graag in mee. En 'beeldtaal' hoort tot de standaarduitrusting van elke volwassene en verdient het daarom, in die gereedschapskist een volwaardige plaats te krijgen.
Puzzels en spellen zijn daarbij als uitdaging te benutten. Maar zeker dient aandacht besteed te worden aan de beelden die al onze leerlingen ongetwijfeld in hun hoofd hebben als ze denken aan een probleemsituatie die wij of het boek hen voorleggen.
Daarnaast kunnen we ze waar mogelijk in situaties plaatsen waar het zeker is dat beeldtaal helpt of zelfs nodig is om tot een resultaat te komen. Ook dat kan uiteraard gewoon binnen de wiskundeles, maar het wordt zeker gestimuleerd door het voorbereiden op en meedoen aan de Kangoeroewedstrijd. Vragen zoals hierboven komen daarin namelijk in groten getale voor. Daar zijn vrijwel alle problemen oplosbaar zonder algebra, maar in beeldtaal. De ervaring leert dat dit zeer motiverend en inzichtverschaffend werkt voor alle leeftijden van 9 tot 18 jaar (en misschien ook daarna).

Met dank aan Leon van den Broek.

Noten

[1] Zie ook 'Visualiseren helpt!' In: Euclides 59 (6), pp. 279-289 (februari 1984).

[2] Dit spel is als aandenken aan alle deelnemers van de Kangoeroe wiskundewedstrijd van 2003 aangeboden.
Je kunt het spelen op de website: www.math.kun.nl/kangoeroe/kangoe_solitair. Daar kun je de grootte van het speelbord kiezen: 3 t/m 12 rijen. Daar wordt ook onderstaande uitleg interactief begeleid.
Prof. Frans Keune (KUN) heeft laten zien dat het spel niet oplosbaar is voor 4, 7, 10, 13, ... rijen, maar wel voor 5, 6, 8, 11, ... rijen door gebruik te maken van drie kleuren.
Zie ook het artikel Kangoe Solitair in het novembernummer van Pythagoras (2003).

[3] - Welke strategie is gevolgd? / Waar let je op?
- Hoe noteer je een oplossing?
- Is er natuurlijke behoefte aan een redenering waarom iets niet kan?
- Wordt er gebruik gemaakt van symmetrie in het redeneren?
- Als de spelers communiceren hoe maken ze hun redenering dan expliciet?
- Waardoor gaan spelers vragen formuleren, zoals: Is er wel een oplossing? / Hoe breng ik systematiek aan in mijn proberen? / Hoe noteer ik mijn zetten? / Wat zijn 'slechte' zetten?

[4] Ontleend aan een voordracht mijn Duitse collega H. Bauersfeld.

Over de auteur

Harrie Broekman (e-mailadres: H.G.B.Broekman@phys.uu.nl) was, tot zijn pensionering in februari 2003, lerarenopleider en vakdidacticus aan het IVLOS (Interfacultair Instituut voor de Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden) te Utrecht.

INTERVIEW MET WIM KLEIJNE

Tien vragen aan een voormalig vakinspecteur

[Rob Bosch]



Aanleiding

Op 1 oktober 2003 nam Wim Kleijne onder grote belangstelling afscheid als inspecteur van het onderwijs. Hiermee kwam een eind aan een lange en indrukwekkende onderwijscarrière. Een loopbaan die hij, na het behalen van de hoofdakte, begon als onderwijzer op een klein schooltje in Hurwenen, in de buurt van Zaltbommel.

Na zijn hbs-B was Wim namelijk naar de toenmalige kweekschool gegaan, zeer tegen de zin van zijn wis- en natuurkundeleraren die voor hem een exacte toekomst voor ogen hadden. Maar Wim wilde per se het onderwijs in.

Na de jaren in Hurwenen was hij als wiskundedocent verbonden aan achtereenvolgens een mulo/mavo in Maassluis en een vwo/havo-scholengemeenschap in Heerenveen. Vanuit Heerenveen volgde de overstap naar Apeldoorn waar Wim jarenlang rector is geweest van het Christelijk Lyceum. Daarnaast werkte hij aan de Economische Hogeschool (nu Erasmus Universiteit) in Rotterdam en aan avondopleidingen wiskunde voor mo-a en mo-b. Na enige tijd rector te zijn geweest van het Nutsseminarium in Amsterdam volgde in 1985 een benoeming tot inspecteur van het voortgezet onderwijs. Intussen haalde hij 's avonds zijn doctoraal examen in de zuivere wiskunde en de filosofie.

Tot aan zijn pensionering bleef Wim werkzaam binnen de inspectie. Eerst in Amsterdam, vervolgens in de oostelijke helft van de provincie Utrecht, daarna in de provincie Friesland, waarna hij tot coördinerend inspecteur benoemd werd in het noorden van het land.

Wim Kleijne is ook buiten zijn reguliere functies op vele terreinen betrokken geweest bij de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs. Zo was hij ondermeer betrokken bij de mo-examens, is hij voorzitter van de CEVO geweest en was hij jarenlang redacteur van Euclides.

Voor zijn verdienste voor het wiskundeonderwijs werd hij op 15 november 2003 benoemd tot erelid van onze vereniging.

Naar aanleiding van Wims pensionering had Rob Bosch een gesprek met hem.

Wim, je hebt in je onderwijsloopbaan bijna alle onderwijsfuncties vervuld: onderwijzer, wiskundeleraar, rector en inspecteur. Heb je in die laatste functies het krijtje, het bord en de leerlingen niet gemist?

Onderwijs was en is mijn passie. Zoals ik ook op mijn afscheidsbijeenkomst heb gezegd, voel ik mij een schoolmeester, door alle functies heen die ik heb mogen bekleden. En zoals dat in het leven gaat: op diverse momenten mag een mens keuzes maken - en een keus voor het één betekent automatisch dat andere aspecten onderbelicht blijven. De leerling, het krijtje en het bord heb ik inderdaad gemist in die functies. En waar ik maar even de kans kreeg, bijvoorbeeld als ik als inspecteur in een klas was, ging ik ook met leerlingen in gesprek.

Gelukkig heb ik in mijn functie van inspecteur erg veel dingen kunnen doen voor het wiskundeonderwijs. Weliswaar niet voor de klas, maar in allerlei adviesfuncties. Allereerst als examenmaker, toen inspecteurs nog in de CEVO zaten. Een geweldige uitdaging om met de leerling voor ogen een zo goed mogelijk wiskunde-examen te maken. Vervolgens in vele commissies, zowel van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het Wiskundig Genootschap als van het Ministerie. Tevens werd ik in de gelegenheid gesteld om diverse werkzaamheden in het buitenland uit te voeren, waar ik met erg veel wiskundeleraren en wiskunde-officials heb kunnen overleggen. Maar ook heb ik kunnen spreken met leerlingen, onder andere in Portugal, in Tsjechië en in Engeland. Buitengewoon verrijkend was dat.

Een bijzonder voorrecht was het om een groot project te mogen uitvoeren op de Nederlandse Antillen en Aruba. Ik heb daar nascholingscursussen gegeven. En daar kreeg ik toch weer dat krijtje in handen en dat schoolbord, waar ik met grote groepen leraren wiskunde en wiskundedidactiek mocht bedrijven. Prachtig was dat. En wat een geweldige vriendschapscontacten zijn daaruit gegroeid, tot op de huidige dag.

Ik herinner mij nog dat mijn lagere school een opknapbeurt kreeg omdat de inspecteur langs kwam. Een deftige man die gedurende een deel van de dag in verschillende klassen de les bijwoonde. Het beeld

van de inspecteur van nu is er een van een rapporten schrijvende bureaufunctionaris met een grote afstand tot de dagelijkse onderwijspraktijk. Is dit beeld correct?

In de eerste plaats vind ik mijzelf niet zo'n deftige man. Maar ja, hoe anderen tegen je aankijken weet je maar nooit. Zelf probeerde ik in al die jaren dicht bij de onderwijspraktijk te staan. Natuurlijk had ik gesprekken met de schoolleidingen van scholen. Maar de gesprekken met leraren, onderwijsondersteunend personeel, leerlingen en ook ouders waren voor mij minstens zo belangrijk. Het is geweldig om een groep leerlingen om je heen te hebben uit de verschillende leerjaren van een school en met hen open over schoolzaken te spreken. Doorgaans laten zij binnen enkele minuten al hun schroom varen en wordt zo'n bijeenkomst een buitengewoon boeiende open discussie. Vervolgens de klassenpraktijk. Ja, dáár gebeurt het! Natuurlijk zijn vele leraren een beetje zenuwachtig als je in hun les komt kijken. En dan kan ik wel zeggen dat dat niet nodig is, maar er gaat toch altijd spanning van uit. Gelukkig raakt men daar tegenwoordig wel meer aan gewend.
Tijdens die lessen zat ik zoveel mogelijk te kijken, of mee te doen, al naar gelang de situatie. Tijdens zelfstandig werken van de leerlingen liep ik ook door de klas en beantwoordde vragen van leerlingen als een soort tweede leraar (weer een beetje die oude schoolmeester) en ik overlegde wat met de leraar tijdens het rondlopen. Doorgaans bleven de observatieformulieren en andere paperassen gewoon in mijn tas: die vulde ik wel op een ander tijdstip in. Het ging mij erom, een goed idee te krijgen wat de leraar met zijn/haar klas deed, hoe het contact verliep over en weer. Ik wilde vóór alles dat ik de echte dagelijkse onderwijspraktijk in het vizier kreeg.

Je noemde zo-even de term 'observatieformulieren'. Wat moet ik mij daarbij voorstellen?

Tijdens het schoolbezoek wil de inspectie een beeld krijgen van de kwaliteit van de diverse aspecten van de school. Eén van die aspecten is de lespraktijk. Door diverse lessen bij te wonen, gespreid over verschillende vakken en over verschillende tijdstippen van de dag, probeert de inspectie een beeld te krijgen van de lespraktijk op de desbetreffende school. Daartoe moet je natuurlijk naar allerlei fenomenen kijken: didactische en pedagogische aspecten, organisatorische zaken en dergelijke. En binnen deze algemene aanduidingen zijn er dan weer concrete aandachtspunten. Bijvoorbeeld: wordt er duidelijk uitgelegd, heeft de docent aandacht voor de individuele leerling, toont de docent in taalgebruik en optreden respect voor de leerling, verloopt de les ordelijk, geeft de docent 'uitdagend' les, enzovoorts. Door alle observaties van alle bezochte lessen naast elkaar te leggen wordt uiteindelijk geprobeerd om een beeld van de lespraktijk van deze school te krijgen. Het gaat er dus niet om dat er een 'rapport' van de individuele docent opgemaakt wordt, maar het gaat erom een uitspraak te kunnen doen over de kwaliteiten van de school. De observatiegegevens zijn zo talrijk dat je ze gemakkelijk vergeet. Daarom wordt een en ander op formulieren genoteerd die later gebruikt worden voor het verslag dat over het bezoek geschreven wordt. Naderhand worden deze formulieren dan vernietigd.

Scholen hebben meer vrijheid gekregen om hun onderwijs in te richten. Praktische opdrachten en werkstukken nemen tegenwoordig een belangrijke plaats in in de toetsing van het onderwijs. Ik heb wat de wiskunde betreft inhoudelijk behoorlijke pittige opdrachten gezien maar ook opdrachten die niet meer om het lijf hadden dan het verzamelen van een paar stukjes van het internet. Is het, met het oog op deze ontwikkeling, voor de inspectie nog wel mogelijk om de kwaliteit van het onderwijs op de diverse scholen te beoordelen?

Het is mijns inziens een goede zaak dat scholen de vrijheid hebben om binnen wettelijke kwaliteitsgrenzen hun onderwijs zelf vorm te geven. Die vrijheid geeft voor wat betreft de praktische opdrachten en de uitvoering daarvan aanleiding tot een grote diversiteit. Inderdaad ben ook ik een behoorlijke variatie van onderwerpen, maar ook van kwaliteit op de uitvoering tegengekomen. Beoordeling van dergelijke opdrachten op inhoudelijke kwaliteiten kan naar mijn mening alleen gebeuren door een vakdeskundige. Wanneer zulke opdrachten beoordeeld worden door een niet-vakdeskundige, dan kan er naar mijn mening uitsluitend sprake zijn van een marginale, procesmatige beoordeling. Zo'n beoordeling betreft dan alleen een aantal formele kenmerken die meestal weinig tot niets met de inhoud te maken hebben. Concreet: de beoordeling van de kwaliteit van een wiskundeopdracht en de uitvoering daarvan kan slechts gebeuren door een deskundige op het gebied van het wiskundeonderwijs van de betreffende schoolsoort. Wanneer zo'n deskundige binnen de inspectie niet aanwezig is, dan zijn er twee mogelijkheden. Óf de inspectie beperkt zich tot een marginale toetsing van de opdracht en de uitvoering daarvan, óf de inspectie huurt een externe deskundige in om een en ander te beoordelen. Met beide situaties heeft de inspectie ervaring.

Incidenteel een schoolopdracht beoordelen of laten beoordelen door een externe deskundige is mooi. Maar als er, zoals te verwachten is, steeds meer nadruk komt te liggen op het schoolexamen dan is de inspectie toch niet meer in staat om al deze examens te beoordelen? Of zie jij daarvoor nog wel mogelijkheden?

Ik ben met je eens dat de inspectie daartoe dan niet meer in staat zal zijn. Maar is dat dan ook noodzakelijk? De vraag stellen is haar tegelijk beantwoorden. De instantie die verantwoordelijk is voor de eigen schoolexamens is de school zelf. En dus zal de school zelf een systeem moeten ontwikkelen van kwaliteitszorg, kwaliteitsbeoordeling en kwaliteitsborging van de schoolexamens. Er worden

momenteel instrumenten ontwikkeld om de school daarbij behulpzaam te zijn. Inmiddels is er een zogenaamde kwaliteitsscan verschenen, ontwikkeld onder verantwoordelijkheid van de vereniging van schoolleiders. Deze kwaliteitsscan richt zich voornamelijk op de kwaliteit van de procedurele aspecten van de schoolexamens. Voor de inhoudelijke kwaliteit van de toetsen van de schoolexamens wordt op dit moment een instrument ontwikkeld door het CITO, de zogenaamde kwaliteitsmonitor. Deze zal binnen afzienbare tijd beschikbaar zijn.
Met deze instrumenten (maar de school is natuurlijk vrij om andere instrumenten te gebruiken) kan de school inzicht krijgen in de kwaliteit van de eigen examens. Aan de hand hiervan kan de school dan verantwoording afleggen over de kwaliteit van de examens aan ouders, de 'omgeving', de overheid (inclusief de inspectie). Natuurlijk moet de 'buitenwacht' er wel vertrouwen in hebben dat er niets mis is met de zelfevaluatie die door de school is uitgevoerd. Maar er bestaan methodes om dat te verifiëren.
Een dergelijke handelwijze lijkt me wél zo goed voor de school: er wordt een beroep gedaan op de eigen verantwoordelijkheid en het hele proces is voor alle participanten transparant.

De functie van 'vakinspecteur wiskunde' is enige tijd geleden verdwenen. Zou het niet een goede zaak zijn om deze functie weer in ere te herstellen? En zou een dergelijke persoon dan ook niet de kwaliteit van het wiskundeprogramma moeten bewaken?
Met name binnen het voortgezet onderwijs wordt het onderwijs gegeven in vakken, groepen van vakken, domeinen en dergelijke. Hoe ook gegroepeerd, altijd zullen er stofinhouden zijn waaraan het onderwijs vorm krijgt. Hoe je het wendt of keert, de wiskunde speelt in het voortgezet onderwijs een belangrijke rol, net zoals de andere vakken. Bij een vorige vraag heb ik al aangegeven dat het voor de evaluatie van de inhoudelijke kwaliteit van belang is dat een vakdeskundige deze beoordeling op zich neemt. In vroeger tijden werd bij de benoeming tot inspecteur gekeken hoe het met de vertegenwoordiging van de verschillende vakken binnen de inspectie gesteld was. Maar toen was de situatie ook een geheel andere. Er waren verschillende inspecties, al naar gelang de schoolsoort: een inspectie AVO, een inspectie LBO, enzovoorts. En binnen deze 'sectoren' werd geprobeerd de vakken evenwichtig te spreiden. Binnen het beroepsonderwijs was dit ook toen al erg moeilijk vanwege de vele verschillende praktijkvak-disciplines. Na de samenvoeging van al deze inspecties tot één inspectie voortgezet onderwijs was dit al helemaal ondoenlijk geworden. En nu een verdergaande ontwikkeling binnen de inspectie ook de grenzen tussen primair en secondair onderwijs doet vervagen, wordt het probleem alleen nog maar groter.
Inderdaad ben ik vele jaren geleden benoemd als inspecteur AVO, met het vak wiskunde als speciaal aandachtspunt. Ik was dus nog een soort vakinspecteur wiskunde. Vanuit die situatie heb ik veel schoolwiskundige kwesties kunnen behandelen, van advisering van leraren tot het bemiddelen in conflicten. Ik heb daarvan genoten.
Maar die tijd ligt achter ons en ik zie die ook niet terugkomen. Dat betekent een andere rol voor de inspecteur en voor de inspectie als geheel. Je kunt je ook afvragen wie de eerste verantwoordelijkheid heeft voor de evaluatie van de kwaliteit van het onderwijs. Zou dat niet de school zélf zijn? Zou dan de school zélf niet voor de beoordeling moeten zorgen met tevens de plicht zich extern, naar de overheid en de samenleving, te verantwoorden?
In die visie zorgt de school zelf voor een grondige evaluatie, hetzij door een vorm van zelf-evaluatie, hetzij door zich door externe deskundigen te laten evalueren. De plaats en de rol van de inspectie in dit proces wordt dan een geheel andere dan we tot nu toe gewend zijn. Ik denk dat deze situatie veel meer past in de huidige moderne tijd. Die wiskundige als vakbeoordelaar, zowel met betrekking tot de onderwijsprocessen als tot het wiskundeprogramma, moet er dus in ieder geval wél zijn. Maar binnen de huidige verhoudingen behoeft dit geen inspecteur meer te zijn.

Het aantal bètastudenten in het algemeen en het aantal wiskundestudenten in het bijzonder is bedroevend laag. Uiteraard spelen factoren buiten het onderwijs hierbij een rol. Maar zou er ook niet iets aan het wiskundeonderwijs moeten veranderen om het tij te keren?
Dit is een buitengewoon belangrijke en tegelijk erg moeilijke vraag. Als ik het ultieme antwoord had, dan zou ik op vele congressen daarvoor de handen op elkaar krijgen. Maar natuurlijk heb ook ik geen pasklare antwoorden. Wél zit mij in deze kwestie een bepaald punt behoorlijk hoog.
Heel vaak proberen we antwoorden op problemen te krijgen door naar externe factoren te kijken. Ik bedoel door naar die zaken te kijken waar we zelf buiten schot blijven. Dan gaan we kijken naar dingen als de zwaarte van het wiskundeprogramma ('als we het wat lichter maken, dan wordt het aantrekkelijker'), de omvang van het wiskundeprogramma ('minder wiskunde stoot niet zo af'), de aankleding van de stof ('levensnabije wiskunde is aantrekkelijker dan abstracte wiskunde'), enzovoorts.
Ik vraag me echt af, of het wel om deze zaken gaat. Jongeren zijn namelijk helemaal niet voor een kleintje vervaard. Door zware programma's laten zij zich helemaal niet afschrikken. Ze trainen zich een ongeluk voor het bereiken van een goede sportieve prestatie, ze oefenen zich blauwe vingers om een ster te worden op de piano of de viool, ze besteden uren en uren aan dans, aan het maken van een exceptioneel goede schoolkrant. Daarmee wil ik niet zeggen dat de zwaarte, de omvang en de aankleding niet belangrijk zijn en telkens weer onder de loep

genomen moeten worden. Natuurlijk wel. Maar naar mijn overtuiging vormen ze niet de ingang voor de oplossing van het genoemde probleem.
In en door alle voorbeelden heen die ik genoemd heb en die je verder maar kunt verzinnen, speelt mijns inziens één constante. Namelijk het gegrepen zijn door, het enthousiasme voor, het vuur en het elan in de ontwikkelde activiteit. Als de jonge mens enthousiast is, dan 'gaat hij er voor'. En dat brengt ons tot de aloude vraag: 'Hoe wordt de jonge mens enthousiast en kunnen wij daar wat aan doen?' En mijn antwoord daarop is dan, door zélf enthousiasme uit te stralen, door te laten zien waardoor je echt gegrepen bent, door nog wat van je oude vuur te tonen. Wij zijn toch niet voor niets dat mooie vak van ons gaan studeren! Probeer dan wat van jóuw vuur op de jonge mens over te brengen. Het is natuurlijk moeilijk om dat telkens weer op te brengen, maar de boog hoeft ook niet altijd zo gespannen te staan. Al is het maar een paar keer.
Daar komt naar mijn mening nog wat bij. Het is in mijn ogen van het grootste belang dat een leerling 'uitgedaagd' wordt, dat er 'uitdagend' onderwijs gegeven wordt - zó dat er een appèl gedaan wordt op de leerling dat hem en haar aanzet tot de taak die voorligt.
Om deze twee dingen gaat het mijns inziens echt: enthousiasme en uitdaging. Ik herinner me nog dat mijn leraar van de hbs dat op gezette tijden probeerde. En dat heeft onuitwisbare herinneringen bij mij achtergelaten. Ik word dan een beetje droef als ik een student van een lerarenopleiding hoor zeggen dat het door hem gekozen vak wiskunde helemaal niet zo belangrijk voor hem is, het had ook best een ander vak mogen zijn, want wiskunde zegt hem niet zoveel, maar hij moest toch iets. Er zal heel wat moeten gebeuren, willen zijn leerlingen ooit met plezier de wiskunde gaan beoefenen. Laat staan dat ze dit vak zullen gaan studeren: verspilling van aanwezig talent.

Tijdens de hbs-periode volgde in de bovenbouw minder dan de helft van de leerlingen wiskunde. Tegenwoordig krijgt iedere leerling wiskunde, van de briljante bèta tot de notoire alfa. Is de wiskunde zoveel belangrijker geworden, of overschatten wij bèta's het maatschappelijk belang van ons vak?
Er wordt wel vaker een vergelijking gemaakt tussen het percentage leerlingen dat nu wiskunde volgt en dat percentage in de hbs-periode. Uitsluitend op dergelijke percentages afgaand zou je inderdaad tot jouw vraag kunnen komen. Maar vergelijking van percentages is één ding. Zonder deze te plaatsen in wat zo mooi het tijdsgewricht heet, kom je dan niet zo ver. Bovendien moet je dan ook de aard van de wiskunde van toen vergelijken met die van nu. Inderdaad krijgt bijna iedere leerling tegenwoordig een of andere vorm van wiskunde, hetzij als apart vak, hetzij geïntegreerd in bijvoorbeeld een technisch vak.
En inderdaad vind ik ons vak voor iedereen van ontzettend groot belang. Door de wiskunde leren we de wereld om ons heen te ordenen en beter te begrijpen. En dat is voor iedereen belangrijk. Daarmee behoeft niet iedereen dezelfde abstracties te beheersen, over dezelfde formele vaardigheden te beschikken en dezelfde wiskundige creativiteit aan de dag te leggen. Maar zonder enig getalsmatig begrip, zonder enige kennis van ordeningsprincipes, van statistische presentaties, van ruimtelijke ordeningen en dergelijke kan geen mens tegenwoordig de krant lezen, noch begrijpen wat er om hem heen gebeurt. Daarom voor iedereen: ja, wiskunde hoort er bij. Maar wel gedifferentieerd: naar aanleg, naar belangstelling en passend bij de leerling. De kunstenaar moet toch iets weten van perspectief en van verhoudingen (zoals de gulden snede), de krantenlezende burger moet zich toch kunnen verweren tegen suggesties die door onjuiste statistische presentaties veroorzaakt zijn, de technicus kan constructies alleen maar baseren op van te voren gemaakte berekeningen.
En dan dat handjevol jongeren dat echt in het vak doorgaat, ja voor hen hele stevige wiskunde. Wiskunde is nodig voor iedereen, voor sommigen met mate, voor anderen wat meer, en voor enkelen in volle omvang.

Wat zijn volgens jou op dit moment de uitgesproken goede en de uitgesproken slechte kanten van het wiskundeonderwijs?
Uitgesproken goed vind ik dat we bij de leerling echt begrip proberen te wekken voor wiskundige concepten en dat we aandacht hebben voor toepassingen en betekenisvolle contexten. Uitgesproken slecht vind ik dat tegenwoordig vrijwel alles in contexten is gevat en dat na het gewekte begrip geen of te weinig aandacht besteed wordt aan de wiskundige technische vaardigheden en de zo noodzakelijke wiskundige basiskennis.

Je hebt een aantal leuke boekjes over wiskunde geschreven, bijvoorbeeld het zebraboekje over de gulden snede. Heb je nog nieuwe plannen voor een mooi wiskundeboek?
Ja, zeker, maar daar laat ik me nu nog niet over uit. Als het zover is, hoor ik wel of het als een mooi wiskundeboek wordt beschouwd en misschien praten we dan verder.

Over de interviewer

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is redacteur van Euclides en universitair hoofddocent aan de KMA te Breda. Hij was wiskundedocent aan het Christelijk Lyceum te Apeldoorn in de tijd dat Wim Kleijne daar rector was.

DE STERRENKUNDE BIJ HET VOORBEREIDEND WETENSCHAPPELIJK ONDERWIJS VAN NEDERLAAG NAAR OVERWINNING

door

Prof. Dr. M. Minnaert
Utrecht

De Mammoet-wet is aangenomen, met haar verdiensten, met haar zwakke kanten, met hare vele mogelijkheden.

Wat daarbij met de Sterrenkunde gebeurd is, ontsiert deze wet op onvergefelijke wijze. De H.B.S., van 5-jarig, wordt 6-jarig, het programma wordt niet verzwaard, maar het éne jaar-uur Sterrenkunde is komen te vervallen als verplicht vak! En dat in een tijd, waarin deze wetenschap een ongekende ontwikkeling meemaakt en zich in de grootste belangstelling van jong en oud verheugt. Wat er bij het oude Gymnasium aan gedaan werd, was nog minder, en ook dat is geschrapt.

Het zou de moeite waard zijn, eens te onderzoeken wat de opstellers van de nieuwe wet persoonlijk voor kennis van de Sterrenkunde hebben, wat voor begrip ze zich eigenlijk van deze wetenschap vormen.

Voor zover er een motivering voor het schrappen werd gegeven, komt het daarop neer: het aantal vakken moest kost wat kost verminderd worden, en daarbij waren dus de vakken met een klein aantal uren het eerst veroordeeld. Een uiterst oppervlakkige redenering dus. Want wat is een „vak"? Meetkunde en algebra, grammatica en literatuurgeschiedenis, plantensystematiek en menselijke fysiologie, kunnen als men wil, net zò goed afzonderlijke vakken genoemd worden. En is het belang van een vak eenvoudig evenredig met het aantal vroeger daaraan bestede uren?

Het zou inderdaad voor het onderwijs gemakkelijker zijn als de zon, de maan en de sterren niet bestonden: dan was er een vak minder. Helaas zijn zij er nu eenmaal; en hun belang voor het wereldbeeld van de mens is zo groot, dat men hun bestaan niet eenvoudig ignoreren kan, ook al heeft Minister Cals in het jaar 1963 het heelal afgeschaft bij het V.H.M.O.

Wij zullen dus moeten zien, hoe we ons in de gegeven omstandigheden op zo verstandig mogelijke wijze aan de nieuwe wet kunnen aanpassen, en het wordt tijd daar geleidelijk over te denken. Men zegt ons, dat het nog wel een paar jaar zal duren, eer de nodige uitvoeringsbesluiten gereedgekomen zijn. Maar intussen dienen wij ons nu reeds voor te bereiden op de nieuwe toestand.

Onze doelstelling is duidelijk: gebruik maken van de mogelijkheid, om de Sterrenkunde als facultatief vak in te voeren, zowel bij het Gymnasium als bij de H.B.S., één uur per week in elk van de hoogste twee klassen. Wie de vakken voor de facultatieve uren zal bepalen, is voor de verschillende schooltypen niet zo ineens te zeggen. Wij zullen dus de eerstvolgende tijd moeten gebruiken om in elk geval alle rectoren, directeuren en andere autoriteiten te overtuigen van de onvervangbare betekenis van de Sterrenkunde voor het V.H.M.O.

Dit zal van alle nu werkzame leraren in de Sterrenkunde een zeker gewetensonderzoek vragen. Heb ik mijn onderwijs echt boeiend weten te maken? Is er iets van blijven hangen – niet alleen ontzag voor de grootsheid van het heelal, maar ook besef van de algemeengeldigheid der natuurkundige wetten? Heb ik hun in deze weinige uren iets voor het leven medegedeeld? Is de kijker van mijn school in bruikbare toestand en krijgen de leerlingen wel eens de gelegenheid, er iets door waar te nemen? Is mijn onderwijs wel voldoende ingesteld op de moderne ontwikkeling der wetenschap, zij het op elementair niveau?

Wij zijn op het ogenblik in het bezit van het prachtige leerboek van Dr. Wanders, dat geweldige kracht bijzet aan onze beschouwingen. Daar kan men zien wat moderne Sterrenkunde betekent, in een vorm, aangepast aan V.H.M.O.-peil. Men vraagt zich af, of de vergissing van de Mammoetwet wel begaan zou zijn als dit boek twee jaar eerder verschenen was. Natuurlijk, ik weet het wel, er staat veel te veel in dat leerboek en het is dus goed dat er een verkorte uitgave verschenen is. We zullen dus, als we dat willen, de uitvoerige editie als handboek voor de leraar kunnen gebruiken, de verkorte editie als schoolboek voor de leerling.

Intussen heeft de Internationale Astronomische Unie besloten, de instelling van een onderwijscommissie voor te bereiden, die deze zomer haar beslag zal krijgen. De astronomen hebben langzamerhand begrepen, dat zij naast hun wetenschappelijk onderzoek ook belangstelling aan de dag moeten leggen voor het onderwijs, zoals de wiskundigen het reeds lang hebben ingezien en zoals ook de andere internationale unies het thans doen. Deze didactische commissies zijn verenigd in een „Interunion Commission", die de coördinatie der vakken bestudeert.

Er is blijkbaar een nieuwe situatie aan het ontstaan, waarin een nauwer verband tussen wetenschap en onderwijs aan beide ten goede zal komen. Het moet, door een ernstige inspanning van de leraren en de astronomen, zo duidelijk worden dat Sterrenkundig onderwijs onmisbaar is in het V.H.M.O., dat in een niet te ver verwijderd verschiet de Sterrenkunde, praktisch overal als facultatief vak ingevoerd, door een wetswijziging haar plaats krijge als vast en onmisbaar bestanddeel van elk Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs.

M. Minnaert

Artikel door prof.dr. M. Minnaert, opgenomen in Euclides 40 (1964-1965), blz. 24-26.

Opmerkingen. In het vhmo (= gymnasium + hbs) werd onder meer kosmografie gegeven, meestal door wiskundeleraren, omdat de bevoegdheid voor wiskunde vaak samenging met die voor mechanica en kosmografie.
Marcel Minnaert (1893-1970), geboren te Brugge, was van 1937 tot 1963 hoogleraar sterrenkunde te Utrecht, met een onderbreking tijdens de oorlog. Hij verwierf bekendheid door het driedelig werk 'De natuurkunde van 't vrije veld'. Recentelijk verscheen een biografie over hem onder de titel 'Heb de natuur lief', geschreven door Leo Molenaar.

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

DE STELLING VAN SPERNER

[Rob Bosch]

Twee verzamelingen heten *vergelijkbaar* als de één een deelverzameling is van de ander. Zo zijn de verzamelingen $\{1, 3, 5\}$ en $\{1, 2, 3, 5\}$ vergelijkbaar terwijl de verzamelingen $\{1, 2\}$ en $\{1, 3, 4\}$ niet vergelijkbaar zijn. Een verzameling van deelverzamelingen van een verzameling V heet een *keten* van V als ieder tweetal deelverzamelingen vergelijkbaar zijn. De verzameling
$K=\{\varnothing,\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\}$
is een keten van $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. De term 'keten' is direct duidelijk als we schrijven
$\varnothing\subset\{1,2\}\subset\{1,2,4\}\subset\{1,2,3,4\}$

Hoe groot kan een keten van V maximaal zijn? Dat wil zeggen, hoeveel deelverzamelingen van V kan een keten maximaal bevatten?

Door de deelverzamelingen van klein naar groot te ordenen gaan we gemakkelijk na, dat een keten altijd te schrijven is als $K=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$ met
$V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_k$
Hieruit volgt dat een maximale keten van V zes deelverzamelingen bevat. De volgende keten is een maximale keten van V:
$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}\subset\{1,2,3,4,5\}$
In zijn algemeenheid geldt dat een maximale keten van een n-verzameling $n + 1$ deelverzamelingen bevat.

De volgende verzameling is *geen* keten van V:
$A=\{\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{2,3,5\},\{1,3,5\}\}$
Sterker nog, geen enkel tweetal deelverzamelingen in A is vergelijkbaar. Een dergelijke verzameling heet een *antiketen* van V. In een antiketen geldt voor ieder tweetal verzamelingen P en Q dat $P\not\subset Q$ en $Q\not\subset P$.

De voor de hand liggende vraag aan de lezer luidt nu: wat is het maximaal aantal deelverzamelingen in een antiketen van V?
Een eenvoudige manier om een antiketen te maken is het kiezen van alle deelverzamelingen met een gelijk aantal elementen. Immers, verzamelingen met een gelijk aantal elementen kunnen geen deelverzameling van elkaar zijn. Voor de verzameling V met vijf elementen levert dit antiketens op van respectievelijk $\binom{5}{1},\binom{5}{2},\binom{5}{3},\binom{5}{4}$ en $\binom{5}{5}$ deelverzamelingen op.
Aangezien $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10$ de grootste binomiaalcoëfficiënten zijn, kunnen we op deze manier een antiketen maken van tien deelverzamelingen. Op dezelfde wijze kunnen we voor verzamelingen met 6, 7, 8, 9, ... elementen antiketens maken met $\binom{6}{3},\binom{7}{3},\binom{8}{4},\binom{9}{4},\ldots$ deelverzamelingen.
Voor een verzameling van n elementen bestaat er dus altijd een antiketen met $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ deelverzamelingen.

Kunnen we door een slimmere keuze het aantal deelverzamelingen in een antiketen nog vergroten? De lezer zal na enkele pogingen merken dat dat niet lukt. De stelling van Sperner vertelt ons waarom.

Stelling 1 (Emanuel Sperner, 1928). *Als A een antiketen is van een verzameling van n elementen, dan geldt:*

$$|A|\leq\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

Deze stelling zegt dat het aantal elementen in een antiketen van een verzameling met n elementen nooit groter kan zijn dan $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.
Door alle deelverzamelingen met $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ elementen te kiezen wordt de bovengrens bereikt, zodat dit tevens het maximale aantal deelverzamelingen is.

Dat een maximale keten van een n-verzameling $n + 1$ elementen bevat is gemakkelijk in te zien. Voor de maximale grootte van een antiketen is het aanzienlijk moeilijker steekhoudende argumenten



Emanuel Sperner

te verzinnen. Het onderstaande bewijs van Lubbell (1966) toont de juistheid van de stelling op een elegante manier aan.

Bewijs van de stelling van Sperner.
Het aantal permutaties van de elementen van een verzameling V met n elementen is $n!$. Als A een antiketen van V is, dan zeggen we dat een permutatie P met $P \in A$ begint als de eerste $|P|$ elementen van die permutatie de elementen van A zijn in een of andere volgorde. Het aantal permutaties dat met P begint is gelijk aan $|P|! \cdot (n-|P|)!$. Merk op dat een permutatie niet met twee verschillende verzamelingen uit A kan beginnen, want dan zou de ene verzameling de ander bevatten, hetgeen in een antiketen niet mogelijk is. Hieruit volgt dat

$$\sum_{P \in A} |P|! \cdot (n-|P|)! \leq n!$$

Als a_k het aantal deelverzamelingen in A is met k elementen, dan geldt dus

$$\sum_k k! \cdot (n-k)! \cdot a_k \leq n!$$

Als we beide leden van de ongelijkheid door $n!$ delen vinden we

$$\sum_k \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

en dus

$$|A| = \sum_k a_k = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_k \frac{a_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_k \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Het bovenstaande fraaie bewijs van Lubbell heeft terecht een plaatsje gekregen in 'Proofs from the Book' van Aigner en Ziegler, waarin naar een idee van Paul Erdös opmerkelijke en elegante bewijzen zijn samengebracht.

Literatuur

M. Aigner, G.M. Ziegler: Proofs from the Book. Springer, 1998.
Ian Anderson: Combinatorics of Finite Sets. Oxford University Press, 1987.
D. Lubbell: A short proof of Sperner's theorem. Journal of Combinatorial Theory 1 (1966), p. 299.
E. Sperner: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. Math. Zeitschrift 27 (1928), pp. 544-548.

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

JAN MODAAL EN IK

[Victor Thomasse]

Ja, was ik maar normaal. Ging bij mij ook alles maar gewoon zijn gangetje zoals het hoort. Zongen Simon & Garfunkel dat al niet, dat bij sommigen het leven heel vanzelfsprekend voorbij trekt? No problem. Terwijl bij anderen, zoals bij mij, alles een voortdurende worsteling is en niets gaat zoals het zou moeten.

Lekker rustig lijkt me dat, normaal zijn. Zeker als wiskundige. Lekker in een hoekje met een boekje. Een voorspelbaar en gedisciplineerd leven. Dan had ik de tijd en rust voor die stapel boeken in de hoek van mijn studeerkamer. Met stip ligt nu bovenaan *Complex Variables*. Een letterlijke stip, rood van kleur, goed zichtbaar op de groene kaft. Tweedehands gekocht in de bibliotheek van de lerarenopleiding. Voor één euro; de boeken met een gele stip waren zelfs maar 50 eurocent. Voor de weirdo's uiteraard, want normale mensen lezen in hun vrije tijd geen wiskundeboeken.

'Maar ja, ik wel', denk ik, terwijl ik de klas in kijk en het krijtje oppak. We behandelen deze weken de statistiek en het begrip gemiddelde levert gelukkig weinig problemen op. Anders is dat bij spreiding: daar hebben ze nog niet zo veel mee.

'Kijk', zeg ik, 'mijn vrienden hebben eerst een opleiding gedaan, toen carrière gemaakt, zijn getrouwd, hebben een huis gekocht met een mooie auto en zijn daarna aan kindjes begonnen. En als je er één hebt dan wil je er daarna vaak nog een en na verloop van tijd heb je er dan soms, zoals in mijn geval, zelfs wel vier. Dus neem zo'n gelukkig gezinnetje waarvan de man net als ik 42 is. Die heeft natuurlijk, anders dan ik, een iets jongere vrouw en een oudste kind van zeg 15. Ze hebben twee jaar gewacht, toen kwam de volgende van 13, na drie jaar kwam de derde van 10 en de benjamin is hier 8 jaar oud. Zou kunnen, nietwaar?' Al pratend schrijf ik het op het bord en reken meteen met hulp van de klas het gemiddelde uit.

```
  15
  13
  10
   8 +
 ----
4 / 46 \ 11,5
```

'En weet je, ik heb ook een gezin van vier kinderen en bij mij is de gemiddelde leeftijd ook 11,5 jaar. Hoe oud zijn mijn kinderen dan, wie heeft een idee?'

In ieder geval is de som van de leeftijden ook 46; dat heeft men goed door en diverse samenstellingen passeren de revue. Ik geef de namen van mijn kinderen in de juiste volgorde: Hanneke, Pascal, Suzan en Ben. Daar hebben ze natuurlijk niets aan, maar vooral de meisjes worden nu benieuwd. 'Ja, ik heb foto's bij me, maar die laat ik nu nog niet zien, eerst raden.'

Als ik uiteindelijk de leeftijden op het bord schrijf ontmoet ik dezelfde mix van vertedering, verbazing en onbegrip als in de grotemensenwereld.

```
  22
  18
   4
   2 +
 ----
4 / 46 \ 11,5
```

'Bij dezelfde vrouw meneer?'
'Ja, bij dezelfde vrouw.'
'Òòòò...'

Ik bespreek het verschil en licht zo het begrip spreiding toe. En, al komt die pas in de volgende paragraaf aan de orde, meteen ook maar de gemiddelde afwijking van het gemiddelde. Die is niet nul zoals je misschien zou verwachten want anders dan in het echte leven zijn alle afwijkingen hier positief. Bij Jan Modaal geeft dat een totaal van 10 jaar aan afwijking en dus een gemiddelde afwijking van 2,5. In mijn geval gaat het om 34 jaar en een gemiddelde van 8,5. Ik werk dat uit op het bord.

15 - 11,5 = 3,5	22 - 11,5 = 10,5
13 - 11,5 = 1,5	18 - 11,5 = 6,5
10 - 11,5 = -1,5; neem 1,5	4 - 11,5 = -7,5; neem 7,5
8 - 11,5 = -3,5; neem 3,5	2 - 11,5 = -9,5; neem 9,5
totaal verschil is 10	totaal verschil is 34
gemiddeld 10:4 = 2,5 jr	gemiddeld 34:4 = 8,5 jr

'Aan die twee getallen zie je dus meteen dat in mijn gezin de leeftijden veel verder uit elkaar liggen. Dat is de kracht van de gemiddelde afwijking van het gemiddelde, daar zit meteen een boel informatie in.'

Nu gaan de foto's rond met de opmerking dat ik ze wel ongeschonden terug wil hebben. Voordat ik ze weer in mijn portefeuille stop, talm ik even. Ik kijk naar de foto van kleine Suzan. En naar die van Ben. De klas verdwijnt even en het wordt stil in mijn hoofd. Stel je voor dat ik die twee nooit had leren kennen. Wat kunnen afwijkingen toch positief zijn.

Over de auteur

Victor Thomasse (e-mailadres: v.thomasse@chello.nl) haalde zijn bevoegdheid Nederlands al in 1983, maar is daarna vooral in het bedrijfsleven actief geweest. Sinds een jaar werkt hij weer in het onderwijs en heeft intussen de eerstegraads opleiding wiskunde afgerond. Momenteel volgt hij de lerarenopleiding natuurkunde.

Aankondiging / Wintersymposium KWG [Metha Kamminga]

8 januari 2005, Utrecht

Op zaterdag 8 januari a.s. vindt het KWG Wintersymposium 2005 plaats, met als thema *'Wiskunde en Verkeer'*.
Het jaarlijks terugkerende Wintersymposium staat onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, maar is toegankelijk voor alle belangstellenden.
Plaats: Aula van het Academiegebouw, Universiteit Utrecht (bij de Dom).
Tijd: van 09u30 tot 15u30.

Onderwerpen

Het (weg)verkeer staat model voor creativiteit
door prof.dr.ir. Martin van Maarseveen, hoogleraar Verkeer en Vervoer, Faculteit Construerende Technische Wetenschappen, Universiteit Twente.
Verkeer intrigeert. We nemen dagelijks deel aan het verkeer en zijn per definitie allemaal expert. Vanuit ons wereldbeeld is de hele wereld bereikbaar en dichtbij. De aanwezigheid van hoogwaardige verkeersinfrastructuur is een essentiële voorwaarde voor sociaal-economische ontwikkeling. Maar is die ontwikkeling ook duurzaam? Congestie, milieubelasting, verkeersonveiligheid, ruimtegebruik: de problemen zijn genoegzaam bekend.
In de voordracht zal een schets worden gegeven van het gebruik van wiskundige modellen in de sfeer van vervoersplanning en verkeersmanagement, alsmede van een aantal ontwikkelingen daarin.

Ongevallen op zee?!
door ir. Yvonne Koldenhof, toegepast wiskundige, opgeleid aan de Universiteit Twente, thans medewerker bij instituut MARIN (Maritime Research Institute Netherlands), op de afdeling MSCN.
Op 8 maart 2001 vaart een groot vrachtschip recht op een olieplatform af en ramt dat zo, dat het platform total loss is. Op dit soort berichten wordt vaak verrast gereageerd; vaak wordt gedacht dat er toch ruimte genoeg is op zee en dat een schip een platform toch makkelijk moet kunnen ontwijken. De praktijk blijkt anders. Het risicomodel dat aan de orde zal komen is, een mooi voorbeeld van hoe de toepassing van relatief eenvoudige wiskunde (uit verschillende deelgebieden) kan leiden tot een goed en bruikbaar model in de praktijk.

Max-Plus algebra in het (trein)verkeer
door prof. dr. Geert Jan Olsder, afdeling DIAM (Delft Institute of Applied Mathematics) van de faculteit EWI (Electrotechniek, Wiskunde en Informatica) van de Technische Universiteit Delft.
Een trein die aankomt op een station, een verkeerslicht dat op groen springt, een e-mailbericht dat aankomt, iemand die de kamer binnenkomt, het zijn allemaal voorbeelden van 'discrete gebeurtenissen' (discrete events). Zo'n gebeurtenis wordt gezien als een plotselinge verandering in een proces. Een dergelijk proces wordt bestudeerd met 'Max-Plus algebra', een speciale algebra die specifiek bij dit soort problemen ingezet wordt om modellen te bestuderen.

Aanmelding

Bij voorkeur on-line:
http://webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium/, ook te bereiken via *http://www.wiskgenoot.nl*.
Eventuele schriftelijke opgave via Metha Kamminga, Noordelijke Hogeschool Leeuwarden, Tesselschadestraat 12, 8913 HB Leeuwarden of per e-mail: *kamminga@tech.nhl.nl*.
Voor deelname wordt een bijdrage van € 14,00 gevraagd voor lunch en consumpties gedurende de dag. Dit bedrag moet, liefst vóór 20 december 2004, overgemaakt worden op bankrekeningnummer 45 65 88 167 van het WG te Utrecht, onder vermelding van 'Wintersymposium'. Na 20 december kunt u zich ook nog opgeven, maar dan is het bedrag € 17,50.
Het is mogelijk om een certificaat van deelname te ontvangen. In dat geval dient u vóóraf uw geboortedatum aan de organisatie door te geven.

Mededeling / Prijsverhoging Zebraboekjes

Epsilon Uitgaven te Utrecht deelt mede, dat per 1 januari 2005 de volgende prijsverhogingen van de Zebra-boekjes worden doorgevoerd.

Prijs voor leden van de NVvW: €7,00 (op bijeenkomsten). Prijs voor niet-leden: €9,00.
Abonnement per vijf delen: €39,00 (inclusief verzendkosten).

Scholen kunnen zich abonneren op 5 delen uit de reeks (6 exemplaren per deel; inclusief verzendkosten) door €215,00 over te maken op postbankrekening 5660167 ten name van Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van 'Schoolabonnement Zebra'.
Zie verder de website van Epsilon-uitgaven: *www.epsilon-uitgaven.nl*.

PROGRAMMEER HET ZELF

TIBasic in de wiskundeles

[Henk Pfaltzgraff]

Inleiding

Programmeren in TIBasic is in wezen een fluitje van een cent. Pak de TI-83 (of -84), zet hem aan, druk op `[PRGM] <NEW>`, voer een programmanaam in en begin te programmeren. Je hoeft niets te declareren, te definiëren of een speciale programmeeromgeving te creëren. Met een minimum aan instructies is een maximale leesbaarheid (ook voor buitenstaanders) te bereiken. Het volgende programmaatje `PRIEMGET` behoeft nauwelijks uitleg. `fPart()`, van *fractionpart*, levert de rest na deling.

```
ClrHome
Disp "VOER EEN"
Disp "ONEVEN GETAL IN:"
Input N
For(D,3,√(N),2)
 If fPart(N/D)=0 :Goto NP
End
Disp "IS PRIEMGETAL":Stop
Lbl NP
 Disp "IS NIET PRIEM..."
 Disp "DELER IS BIJV:"
 Disp D
```



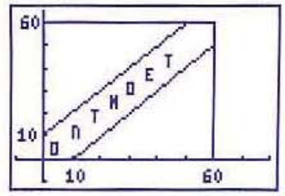


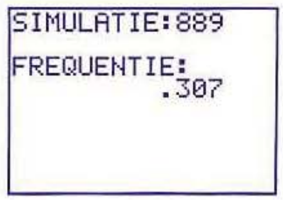
In het boek *Programmeer het zelf* probeer ik aan te tonen dat deze toegankelijke vorm van programmeren een verrijking van de schoolwiskunde kan betekenen. Hier volgen een paar fragmenten uit dat boek.

Dating

Twee geliefden proberen elkaar dagelijks te ontmoeten voor een innige omhelzing. Beiden arriveren random tussen 17.00 en 18.00 uur bij het meeting point. Afgesproken is om hoogstens 10 minuten te wachten op de ander. Hoe groot is de kans op een omhelzing?







Stel de aankomsttijden zijn resp x en y minuten na 17.00 uur. Bekijk het kansvierkant met oppervlakte $60\times 60 = 3600$ min^2; vierkante minuten dus. Elk punt (x, y) daarbinnen staat voor één van de mogelijke gebeurtenissen. Het tijdsverschil tussen de geliefden $x - y$ of $y - x$ moet (liefst) kleiner zijn dan 10 minuten: voor het ontmoetingsgebied geldt dus $|x - y| < 10$.

De lijn $y = x$ beschrijft gelijktijdigheid; het gebied buiten de lijnen $y = x + 10$ en $y = x - 10$, de twee rechthoekige driehoeken, bestrijkt een oppervlakte van in totaal 2500 min^2. Voor de gelukzalige momenten zijn dus $3600 - 2500 = 1100$ min^2 over. Met andere woorden: de kans op een omhelzing is

$$\frac{1100}{3600} = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056\,.$$

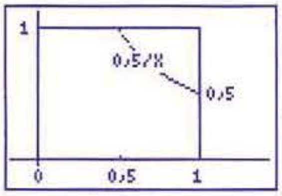
Hier volgt de kern van het bijbehorende TIBASIC-programma.

```
ClrHome
Output(1,1,"SIMULATIE:")
Output(3,1,"FREQUENTIE:")
0→S:0→T
Lbl 0
 T+1→T
 S+(abs(60rand-60rand)<10)→S
 Output(1,11,T)
 Output(4,10,round(S/T,3)
Goto 0
```

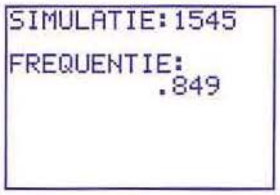
Het product van twee randomgetallen

Een vergelijkbaar vraagje is:

Trek twee keer een randomgetal tussen 0 en 1. Hoe groot is de kans dat het product minder is dan 0,5?







Aangezien $x \cdot y < \frac{1}{2}$ is, moeten we binnen het kansvierkant de oppervlakte onder de kromme $y = \frac{0,5}{x}$ in rekening brengen:

$$\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}(1 + \ln 2) \approx 0,8466$$

en dat is de gevraagde kans.

```
ClrHome
Output(1,1,"SIMULATIE:")
Output(3,1,"FREQUENTIE:")
0→S:0→T
Lbl 0
 T+1→T
 S+(rand*rand<0.5)→S
 Output(1,11,T)
 Output(4,10,round(S/T,3)
Goto 0
```

Maak een driehoek van een stok

Martin Gardner beschrijft in 'The Colossal Book of Mathematics' in hoofdstuk 21 en 22 hoe verraderlijk sommige ogenschijnlijk simpele kansberekeningen zijn. Befaamde wiskundigen als Leibniz, d'Alembert en Erdös zijn ons voorgegaan in het maken van fouten. Leibniz dacht dat de kans op 12 even groot is als de kans op 11 bij het werpen met twee dobbelstenen; d'Alembert veronderstelde dat na het werpen van erg veel keer 'munt' achter elkaar de kans op 'kop' groter zou zijn, leidend tot de conclusie dat een dobbelsteen een geheugen heeft.



Een bekend probleem is dat van de stok die at random (aselect) in drie stukken geknipt wordt. Hoe groot is de kans dat uit die drie stukken een driehoek gevormd kan worden? (De driehoeksongelijkheid zegt, dat de langste zijde van een driehoek altijd korter is dan de som van de andere twee zijden.)

Stel dat onze stok 1000 millimeter is. Hij wordt doorgeknipt op twee plaatsen (zie figuur 4).

Methode 1: knip tegelijkertijd op twee willekeurige plekken.

Methode 2: knip de eerste keer willekeurig, pak blindelings (willekeurig) een van de twee stukken, en knip een tweede keer.

Methode 3: hetzelfde als methode 2, echter pak voor de tweede knip het grootste stuk van de twee; dat geeft een grotere kans, maar gaat natuurlijk ten koste van de aselectheid (je selecteert het grootste stuk, omdat je daarmee twee keer zoveel kans krijgt op succes).

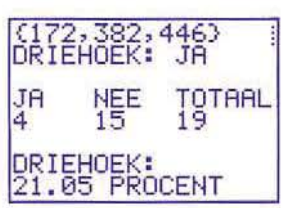
Het programma STOKIN3 biedt methode 1 en 2 aan (de volledig aselecte experimenten) in een stap-voor-stap demo-versie en een doorlopende versie, die we echt wel nodig hebben, want pas na vele honderden simulaties komt er enige lijn in.

Hier volgt de kern van het programma. De gebruiksvriendelijkheid is weggelaten.

(1) Knip tegelijk in drieën

(In de volgende programma's staat niet tot die programma's behorend commentaar tussen // en //; red.)

```
rand→P:rand→Q
If Q>P
Then
 P→A:Q→B
Else
 P→B:Q→A
End
{A,B-A,1-B}→L1:SortA(L1)        //Kleinste voorop//
Output(1,1,"  ")
Output(1,1,round(1000L1,0))
If L1(3)>L1(1)+L1(2)        //Driehoeksongelijkheid//
Then
 Output(2,11,"NEE")
 N+1→N
 Output(3,1,"WANT")
 Output(3,6,round(1000L1(3),0))
 Output(3,9,">")
 Output(3,10,round(1000L1(1),0))
 Output(3,13,"+")
 Output(3,14,round(1000L1(2),0))
Else
 Output(2,11,"JA  "): J+1→J
End
Output(5,1,J)
```



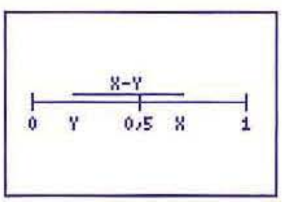
(2) Knip, kies en knip in het grootste stuk

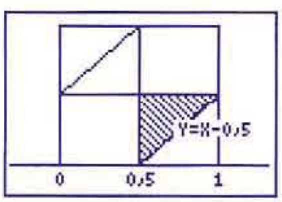
```
rand→P:rand→Q
rand→R:rand→S
If S<0.5                                  //Kies het grootste//
Then
 PQ→A:P-A→B
Else
 P→A:(1-P)R→B
End
1-A-B→C:{A,B,C}→L1:SortA(L1) //Kleinste voorop//
Output(1,1,round(1000L1,0))
If L1(3)>L1(1)+L1(2)           //Driehoeksongelijkheid//
Then
 Output(2,11,"NEE")
 N+1→N
 Output(3,1,"WANT")
 Output(3,6,round(1000L1(3),0))
 Output(3,9,">")
 Output(3,10,round(1000L1(1),0))
 Output(3,13,"+")
 Output(3,14,round(1000L1(2),0))
Else
 Output(2,11,"JA "): J+1→J
End
Output(5,1,J)
```



De theorie

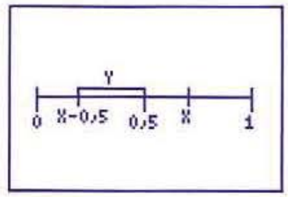
(1) Knip tegelijk (random, uiteraard) op twee plaatsen: x en y (neem even $y < x$).
Dat geeft een punt (x, y) in het kansvierkant met de volgende eigenschappen:
$x > \frac{1}{2}$ en $x - y < \frac{1}{2}$ en $y < \frac{1}{2}$





Het hierbij behorende gebied is de gearceerde driehoek met een oppervlakte die $\frac{1}{8}$ is van het eenheidsvierkant. Wanneer je de tweede mogelijkheid ($y > x$) erbij neemt, geeft dat nog zo'n driehoek, zodat de kans dat van een stok die tegelijk op twee plaatsen gebroken wordt een driehoek gemaakt kan worden, gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

(2) Knip eerst op een willekeurige plek x (stel eerst weer even dat x groter is dan $\frac{1}{2}$). Knip het grootste stuk (tussen 0 en x) willekeurig in twee stukken. Er geldt $x - \frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$.

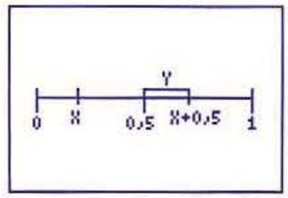


De lengte van het toegestane gebied voor y is
$\frac{1}{2} - (x - \frac{1}{2}) = 1 - x$
en omdat y random ligt tussen 0 en x geldt:

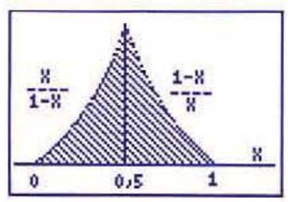
$y = x$ * rand, dus $yx < 1 - x$ oftewel $y < \frac{1-x}{x}$.

De oppervlakte van het toegestane gebied is dan

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1-x}{x}\,dx = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx = -\tfrac{1}{2} + \ln 2 \approx 0{,}19315$$



In het geval $x < \frac{1}{2}$, is het toegestane gebied $x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x$. En dan zal $y = (1 - x)$ * rand moeten zijn, dus
$y(1 - x) < x$ oftewel $y < \frac{x}{1-x}$ met de voorwaarde $\frac{1}{2} < y < x + \frac{1}{2}$,
en als oppervlakte $\int_{0}^{1/2} \frac{x}{1-x}\,dx$ met hetzelfde antwoord.



In totaal is de kans op een driehoek na voorselectie van het grootste stuk dus
$2\cdot(-\frac{1}{2} + \ln 2) = -1 + 2\ln 2 \approx 0{,}3863$.

Over de auteur

Henk Pfaltzgraff (e-mailadres: henk@henkshoekje.com) was 30 jaar leraar en 20 jaar conrector aan (de bovenbouw van) het Zaanlands Lyceum voordat hij in 1999 (enigszins vervroegd) afscheid nam.
Van 1987-1993 was hij lid van de ACD (examencommissie) wiskunde-B-vwo.
Zijn ideeën over het wiskundeonderwijs zijn terug te vinden op www.henkshoekje.com en in het manuscript van zijn boek 'Programmeer het zelf'. Dit boek is, geautoriseerd voor vermenigvuldiging op de eigen school, te bestellen via henk@henkshoekje.com. U krijgt dan kosteloos de 270 pagina's A4 (in PDF-formaat) en de 122 programma's (.83P) digitaal toegezonden.*

Aankondiging / Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005 [Melanie Steentjes]

Elk jaar doen duizenden leerlingen van een groot aantal scholen mee aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De Wiskunde Olympiade is niet alleen bedoeld voor 'bollebozen' met een wiskundeknobbel, maar voor elke leerling die geïnteresseerd is in problemen van wiskundige aard waarin de uitdagende en aantrekkelijke kanten van wiskunde aan de orde komen.
Ook dit jaar was het weer een groot succes. Op vrijdag 12 november kregen de tien beste deelnemers aan de tweede ronde hun prijs uitgereikt op de Technische Universiteit in Eindhoven. Zij worden vervolgens getraind voor de Internationale Wiskunde Olympiade, die in juli 2005 zal plaatsvinden in Mexico.

Wilt u uw leerlingen ook laten meedoen aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade en ze een kans geven om een reis te verdienen naar Slovenië in 2006? Geef uw school dan op voor deelname aan de eerste ronde, die volgend jaar zal plaatsvinden op 14 januari.

U doet dat door een mail te sturen aan: *melanie.steentjes@citogroep.nl*

Ook kunt u een briefje sturen naar:

Citogroep t.a.v. Melanie Steentjes
Postbus 1034
6801 MG Arnhem.

Vermeld hierin de naam en het adres van de school en uw eigen gegevens. U bent dan wedstrijdleider, wat inhoudt dat u ervoor zorg draagt dat de deelnemende leerlingen op 14 januari de opgaven kunnen maken. Na afloop stuurt u de resultaten naar ons op. Wij versturen de opgaven en de resultatenformulieren in de eerste week van januari 2005 naar de wedstrijdleiders van alle aangemelde scholen. Wij hopen op een grote belangstelling en veel deelnemende leerlingen in 2005!

Melanie Steentjes is secretaris van de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade.

TIEN VRAGEN AAN EEN 10E-JAARS NWD-ER

Een interview

[Dick Klingens en Wim Laaper]

Inleiding

De Nationale Wiskunde Dagen werden in 2004 voor de 10e keer door het Freudenthal Instituut georganiseerd, zoals gebruikelijk in Congrescentrum De Leeuwenhorst in Noordwijkerhout.
Aan het einde van de tweede dag werden de deelnemers aan alle tien door de organisatie in het zonnetje gezet. Onder hen herkenden we een tweetal dat ook al die tijd op dezelfde school les gaf, Ruud Houweling en Kees Rijke.
Aan de eerste legden we een 10-tal vragen voor.

De vragen

Wil je iets over je beroepsmatige bezigheden vertellen?

Ik ben op de kop af 30 jaar wiskundedocent geweest aan de Gereformeerde Scholengemeenschap Randstad te Rotterdam. Ik ben in die periode doorgegroeid van de onderbouw tot de havo- en vwo-bovenbouw. Ook het begeleidingswerk is diezelfde weg gegaan: van brugklasmentor tot de laatste vijf jaar mentor van havo-5 leerlingen: prachtig, die begeleiding op weg naar het examen. Ook mocht ik de laatste vijf jaar verschillende zij-instromers coachen: mooi om anderen te zien groeien en ontwikkelen in zo'n baan! Mijn actieve loopbaan kreeg een plotselinge wending richting Pabo waaraan ik sinds augustus j.l. volledig aan het werk ben als reken-didactiekdocent: Stimulerend en uitdagend om me de komende tijd bezig te houden met de basis van het 'wiskundebouwwerk'.

Waaraan denk je het eerst als we het hebben over de Nationale Wiskunde Dagen?

Als ik de prospectus van de NWD ontvang, denk ik: 'Yes, daar is-t-ie weer!' Stimulerend, interessant, fijne contacten, vermoeiend en o zo waardevol! Die wiskundigen zijn toch een stelletje mafkezen, dat ze daar zelfs het vrije weekend voor over hebben.

Kun je aangeven waarom je al die jaren hebt deelgenomen en nooit een jaartje hebt verzuimd? Met andere woorden: wat maakt de NWD voor jou zo aantrekkelijk?

Kees en ik hebben die 10 jaren samen de NWD bezocht, omdat het zo stimulerend was. Wij gingen juist naar verschillende workshops, zodat we elkaar daar ook over konden vertellen. Tijdens de plenaire lezingen zaten we bij elkaar en genoten samen met vele anderen van het gebodene. En, waarom geen collega's van ons? Zij gaven aan er niet zo'n behoefte aan te hebben. En wij zeiden (niet aardig van ons) dat het best een zwaar en moeilijk programma was... (Daarbij zou het voor mij jammer zijn om een jaartal-NWD-shirt te missen van de *funrun*...; maar dat terzijde.)

Ruud Houweling



Welke twee zijn de meest interessante workshops of lezingen die je nu te binnen schieten?

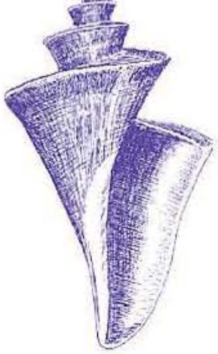
Twee lezingen of bijeenkomsten? Ik weet er nog veel meer! Maar vooruit: Claudi Alsina's *Hoe verleid ik mijn leerlingen tot wiskunde?* en Agnes Verweij met *Perspectief in een kastje.*
En dan mag ik niet noemen: Job van de Groep met zijn *Gegoochel met getallen* en zijn *3D kijken*. Ook mag ik niet meer noemen: Danny Beckers met zijn historische onderwerpen. En ook noem ik niet *The Bells*, *De Zeepbellen*, *Het Fietswiel*, *De Boomerang*.

Als je de eerste NWD vergelijkt met de laatste (in 2004), welke verschillen zijn er dan te zien?

De onderwerpen zijn nog even aansprekend als 10 jaar geleden. Hoe is het mogelijk dat de organisatie elk jaar opnieuw een aansprekend programma weet neer te zetten. Het was alleen de eerste jaren wat rustiger. Blijkbaar was het toen nog niet zo bekend bij de docenten...

Heb je wel eens ideeën, opgedaan tijdens de NWD, in je lessen gebruikt?

Het is jammer dat je, zeker in de Tweede fase, zo weinig tijd hebt voor 'uitstapjes'. Wel heb ik, in navolging van Alsina, eens vanuit de klas telefonisch contact opgenomen met Pythagoras (zie pagina 117, en



Een telefoongesprek met Pythagoras

'Spreek ik met professor Pythagoras?

……

Hallo Pythagoras, ik bel hier vanuit de Nationale Wiskunde Dagen in Nederland.

……

Alles goed met u?

……

Ik bel u om te vertellen dat we nog steeds uw stelling onderwijzen.

……

Welke stelling? Uw stelling natuurlijk: het kwadraat van de hypotenusa is gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden in elke rechthoekige driehoek.

……

Pardon? Hoe kan ik nu weten dat u de resultaten nog niet heeft gepubliceerd?

……

Oh. Dat hebben anderen na u gedaan.

……

Nee, ik vertel u geen namen, ik wil de geschiedenis niet veranderen.

[1], pp. 29-33). Maar het opladen van de wiskundige batterij heeft zeker z'n uitwerking gehad in mijn lessen: extra motivatie en enthousiasme.

Ben je door je deelname aan de NWD anders tegen het wiskundeonderwijs aan gaan kijken?
Ik ben onder de indruk gekomen van de veelzijdigheid van wiskunde. Je hebt werkelijk in alle richtingen raakvlakken. Het staat zo gezegd bol van de veelzijdigheid. Inderdaad, een onbewuste toespeling op een Zebra-boekje (van Peter Boon en Martin Kindt), dat een aantal keren onderwerp is geweest van presentaties van leerlingen van Kees en mij op school.

Krijgen jullie je deelname aan de NWD binnen je school gemakkelijk gefinancierd? Staan (jonge) collega's niet te dringen om ook te gaan en wie betaalt dat allemaal?
De toestemming van de directie om de NWD te bezoeken heeft die 10 jaren geen enkel probleem gegeven. Vanaf deze plaats wil ik ze nog eens bedanken. Het geld kwam trouwens uit de nascholingspot. Het voordeel is dat die *zaterdag* in het programma zit, want jonge collega's hebben dan vaak andere (gezins)verplichtingen. Dat kwam Kees en mij wel goed uit.

Waarin onderscheiden de NWD zich van andere door jou bezochte conferenties en cursussen?
Waar ter wereld vind je een bijzonderder slag mensen dan 500 wiskundigen bij elkaar op vrijdag en zaterdag? Er is geen andere conferentie mee te vergelijken. Alleen de sfeer al, zo informeel. Er is ook geen enkele conferentie waarop men op zaterdag vanaf 7 uur 's morgens in het donker (en soms door 5 cm sneeuw) 8 km gaat hardlopen om vervolgens weer de hele morgen intensief met wiskunde aan de slag te gaan!

Zijn er redenen, denk je, waarom een wiskundedocent niet in de NWD geïnteresseerd zou kunnen zijn? Hoe zou jij zo'n docent ervan willen overtuigen om een keer wél te gaan?
Ik denk dat je verslaafd wordt aan de NWD, dus om jezelf te beschermen moet je er niet naar toe gaan. Toch lijkt het me logisch dat je, na lezing van het bovenstaande, er toch graag aan verslaafd wil raken...
Overigens, het afgelopen jaar mocht ik maar liefst driemaal in Noordwijkerhout verblijven: Panama, NWD en Nationale Reken Dagen. In 2005 zal de NWD er niet meer bij zijn, vrees ik. Vanwege de nieuwe baan wordt het waarschijnlijk 'alleen' Panama en de Nationale Reken Dagen.

Slot

De 11e editie van de Nationale Wiskunde Dagen wordt georganiseerd op vrijdag 4 en zaterdag 5 februari 2005, ook weer in Noordwijkerhout. Voor meer informatie zie de website van de NWD, *www.fi.uu.nl/nwd*.

Noot

[1] M. Doorman e.a.: Tien jaar NWD, een lichtbundel. Freudenthal Instituut, Utrecht (2004)

Over de auteurs

Dick Klingens (e-mailadres: dklingens@pandd.demon.nl) en Wim Laaper (e-mailadres: wlaaper@iaehv.nl) zijn beiden redacteur van Euclides.

DATA: GETALLEN MET EEN CONTEXT

Arthur Bakker promoveerde in mei 2004 op een proefschrift over ontwikkelingsonderzoek voor het statistiekonderwijs in de onderbouw havo/vwo. Een bespreking.

[Wouter Boer]

Inleiding

Zo is het toch maar: te veel leerlingen in de derde klas havo/vwo weten niet wat het gemiddelde en de mediaan eigenlijk voorstellen. Berekenen gaat nog wel, even herhalen en het zit er weer in. Maar wat stelt het voor? Wat heb je er aan?

Het proefschrift, helder geschreven in begrijpelijk Engels, levert een bijdrage om het curriculum zinniger te maken. Leerlingen moeten leren data te analyseren en over statistische informatie te communiceren. Berekeningen van het gemiddelde, de mediaan, de kwartielen, het bereik komen vanzelfsprekend aan bod, maar Bakker stelt het begrip verdeling centraal.

Statistiek?

Volgens Bakker is statistiek geen tak van de wiskunde, ook niet van kansrekening. In de praktijk is het wel een deel van het wiskundeonderwijs. Statistiek is geen wiskunde met contexten. Het is eigenlijk een ander vakgebied met wiskunde als hulpvak. Bakker haalt daarbij Moore aan[1]: 'Data zijn getallen met een context.' Statistiek gaat over verzamelingen van data om daarmee verschijnselen te beschrijven en te voorspellen. Wat heb je bijvoorbeeld aan de mediaan zonder dat je het hebt over de betekenis voor de context?

De onderzoeksvragen

De schrijver stelt zich ten doel, een instructietheorie voor statistiekonderwijs aan eerste- en tweedeklas-leerlingen te ontwerpen op grond van theorie en ervaring. De concepten steekproef, data, verdeling, centrum en spreiding hangen nauw samen. Door uit te gaan van het begrip verdeling kan die samenhang benut worden.

In de statistiek gebruiken we symbolen met een bepaalde betekenis, bijvoorbeeld de klokvorm van de normale verdeling. Leerlingen doorlopen een proces van symbolisering: het maken van een symbool voor een speciaal doel, het gebruik, het verbeteren en misschien het maken van een nieuw symbool. Een leerling kan door het tekenen van staafdiagrammen van verschillende verdelingen kennismaken met verdelingen met een 'bult', zien wat er met de 'bult' kan gebeuren, daarover redeneren en zodoende het symbool van de klokvorm van de normale verdeling ontwikkelen.

De onderzoeksvragen zijn dan ook: hoe is een besef van verdeling te ontwikkelen en hoe verloopt het proces van symboliseren tijdens het leren redeneren over verdelingen. Daarbij wordt steeds de mogelijke rol van de computer betrokken.

Uitgangspunten

De uitgangspunten worden breedvoerig verantwoord. Stug voor de ene lezer, hartverwarmend voor de ander. Om enig idee te geven het volgende.

1. Realistisch wiskundeonderwijs is het vertrekpunt. Dat houdt onder meer in:

- werken met een betekenisvolle context voor conceptvorming,
- progressief mathematiseren (van intuïtief naar formeel),
- gebruik maken van de eigen producties van leerlingen,
- interactie om die eigen producties onderling te vergelijken en er over na te denken.

2. Uitgangspunt is eveneens dat wiskundeconcepten en -werktuigen er steeds toe dienen, de verschijnselen om ons heen of van de wiskunde zelf te beschrijven. Vandaar dat in het proefschrift veel aandacht wordt besteed aan de samenhang met andere wiskundeonderdelen, aan de geschiedenis van een wiskundeconcept en aan het zoeken naar

ca. 1350	Proto-bar graph of a theoretical function (Nicole Oresme)
17th cent.	Tables of empirical data (*Die Tabellen-Statistik* in Germany)
ca. 1660	Automatic recording device producing a graph of temperature (Christopher Wren)
1686	Edmund Halley's bivariate plot of barometric readings against altitude
1765	Measurement error as deviations from regular graphed line (Lambert)
1786	Playfair's bar chart
1801	Playfair's pie chart or circle graph
1821	Fourier's cumulative frequency curve of inhabitants of Paris by age groupings
1828	Mortality curve (Quetelet)
1830-35	Graphical analysis of natural phenomena appears in journals
1833	Guerry's first histogram of crime by age and months
1846	Quetelet represented urn schemata as symmetrical histograms with a "curve of possibility," later called normal curve
ca. 1855	Bar graphs and polar-area graphs on mortality by Florence Nightingale
1868	Statistical diagrams in a school textbook (Levasseur)
1874	Age pyramid, bilateral histogram (F. Walker)
1875	Galton's ogive graph of normal distribution
1884	Dot plot (see Wilkinson, 1999)
1969	Box plot and stem-and-leaf plot for EDA (Tukey)

Overzicht van de geschiedenis van grafieken, hoofdzakelijk van Beniger en Robyn (1978)

verschijnselen die een wiskundeconcept kunnen oproepen. Dat heeft in ieder geval een fraai hoofdstuk opgeleverd over de geschiedenis van verschillende statistiekconcepten; zie de tabel.
3. Een ander uitgangspunt is het werk van C.S. Peirce, waaraan de bevindingen tijdens het onderzoek getoetst worden. In diens theorie gaat het met name over het proces van betekenis toekennen aan tekens/symbolen. Dat proces verloopt niet lineair, want een symbool kan op verschillende manieren tot stand komen en tot verschillend gebruik leiden. Peirce zegt ook dat je in leersituaties goed gebruik kunt maken van 'diagrammatisch redeneren' en 'hypostatische abstractie'.

Diagrammatisch redeneren

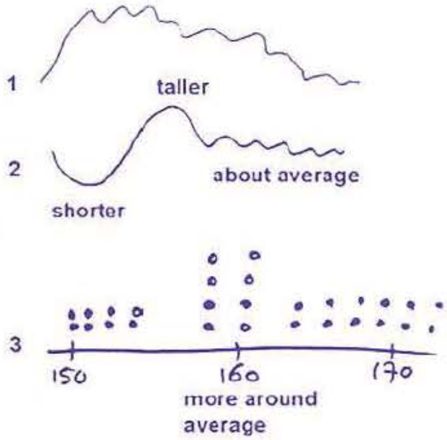
Een diagram geeft relaties weer. Het diagrammatisch redeneren valt uiteen in drie stappen: een diagram construeren, experimenteren met dat diagram en reflectie op het experimenteren. Ter illustratie het volgende voorbeeld. In het experiment werd aan Danny gevraagd hoe de grafiek van de lengte van klasgenoten er uit zou kunnen zien. Zie figuur 1. Hij tekende eerst de daarin afgebeelde grafiek 1. Toen een nadere verklaring gevraagd werd, tekende hij grafiek 2: 'Er zijn grotere, kleinere en gemiddelde leerlingen.' Bij de vraag hoe hij aan de tweede grafiek kwam, tekende hij de derde uit figuur 1: 'Er zijn er meer rond het gemiddelde.' Danny kwam dus steeds verder door diagrammen te maken en te verbeteren. In het onderzoek werden de leerlingen uitgedaagd, zich in te denken hoe de vorm van een diagram van een steekproef zou veranderen bij toenemen van de populatiegrootte. Zie figuur 2. Dat bleek heel effectief te zijn bij het vormen van het concept verdeling. De computer was hier zeer behulpzaam omdat je daarmee verschillende representaties kunt maken en de data kunt onderverdelen in groepen.

Hypostatische abstractie

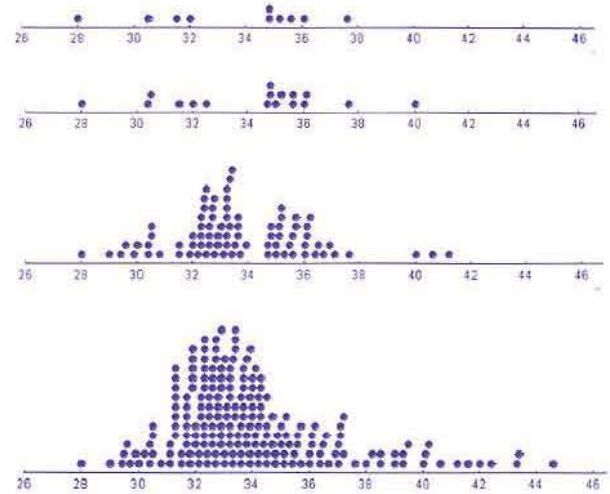
Hoe kun je iemand een nieuw concept zoals een verdeling leren? Door hem kenmerken te laten noemen (de predikaten) van wat hij ziet. Het maken van een nieuw concept door overgang van een predikaat naar een zelfstandig naamwoord noemt Peirce hypostatische abstractie. Bijvoorbeeld van 'deze dingen horen bij elkaar' naar 'ik heb hier een verzameling'. Een verzameling is dan een nieuw concept waarover je weer kunt redeneren, bijvoorbeeld 'het is een bijzondere verzameling'. Door leerlingen eerst iets te laten beschrijven met predikaten kun je de overgang naar nieuwe concepten vergemakkelijken. Bij een verdeling maakt het uit of een leerling spreekt over data die verspreid zijn of dat de leerling zegt dat de spreiding groot is. In het laatste geval heeft hij een nieuw concept beet, waarmee hij verder kan redeneren in nieuwe situaties. In het onderzoek gingen de leerlingen bij de lengteverdeling van klasgenoten van de 'meerderheid van de data' naar een 'bult' van de verdeling naar de vorm van de verdeling, en konden ze daarna over verschillen in de vorm redeneren. Bijvoorbeeld over de plaats en de vorm van de 'bult' als je de lengteverdeling van een hogere klas neemt.

Het onderzoek

In ontwikkelingsonderzoek worden drie fasen (voorbereiding en ontwerp, lesexperimenten, terugkijken) steeds herhaald. Een hypothetisch leertraject wordt ontworpen, daarmee geëxperimenteerd en daarna bijgesteld, dan weer geëxperimenteerd enzovoorts. De lesexperimenten in dit onderzoek vonden plaats in vier brugklassen en een tweede klas havo/vwo. Mini-interviews en klassengesprekken speelden een doorslaggevende rol.



FIGUUR 1 Danny's symboliseren van drie groepen



FIGUUR 2 Verschillende steekproefgrootten van middelomvang bij jeans

Resultaten

Het boek eindigt jammer genoeg niet met lesmodules, maar dat was ook het doel van het onderzoek niet. Er staat ook geen A4-tje met eindtermen in. Bakker doet wel een flink aantal voorstellen, waarvan hier enkele volgen.

Inhoud en opzet van het curriculum

Bakker stelt voor de volgende concepten in de onderbouw aan de orde te laten komen: variëteit, steekproeven, data, centrum, spreiding en verdeling. Je kunt het beste beginnen met situaties waarin de leerling variëteit verwacht, bijvoorbeeld bij het tellen van een kudde olifanten op een foto: verdeel eerst de foto in hokjes, zoek het 'gemiddelde' hokje en reken daarmee verder. Zie figuur 3. En je stelt de vraag hoeveel brugklassers met een ballonvaart mee kunnen, zodat leerlingen wel moeten gaan nadenken over de betekenis van het gemiddelde gewicht van brugklassers. Dus door vraagstellingen en interacties inzicht laten krijgen in het concept 'gemiddelde' en niet door herhalen van het berekenen van het gemiddelde van data in een tabel. Centrum en spreiding kun je behandelen als karakteristieken van een verdeling zoals die van de levensduur van batterijen, om dan te vervolgen met steekproef en vorm van een verdeling: symmetrisch of scheef. Het is van groot belang voor het ontwikkelen van inzicht dat de leerlingen het proces doorlopen van vraag, ontwerp, steekproef, data-analyse, communicatie over het resultaat, bijstellen van de vraag.

Interactie

In het onderzoek bleek maar weer eens hoe effectief mini-interviews (2 tot 4 minuten) en klassengesprekken zijn en hoe belangrijk het is om vragen te stellen waarover gecommuniceerd kan worden. De vraag: 'Welk van de twee batterijmerken is het beste?' (zie figuur 4) nodigt een leerling te weinig uit tot een goede analyse. Hij kan snel tevreden zijn met zijn antwoord zonder veel te leren. De vraag 'Hoe kun je een winkelier overtuigen welk merk hij het beste kan inkopen?' lokt wél communicatie en analyse uit. Ook vragen van de vorm 'Wat gebeurt er als ...' doen dat. Diagrammatisch redeneren en hypostatische abstractie komen in een interactieve omgeving ook het meest tot hun recht.

Leerlingen hebben er groot belang bij om te begrijpen hoe data verzameld en gemeten zijn. Bakker pleit voor grote contexten in plaats van veel kleine om de betekenis van de data goed tot een leerling te laten doordringen.

Het is opperbest wanneer een leerling zelfstandig alle opdrachten kan maken en zo kan een leerboek misschien ook in elkaar gezet worden. Maar het idee dat interactie slechts een bijproduct van onderwijs kan zijn is een ernstige misvatting en zeer schadelijk. Het is verbazingwekkend hoeveel opdrachten een leerling goed kan maken zonder te beseffen waar het eigenlijk om gaat. Zonder veel (klassen)gesprekken verarmt het onderwijs ontoelaatbaar. De opdrachten voor de leerlingen moeten dan wel aanleiding geven tot interactie.

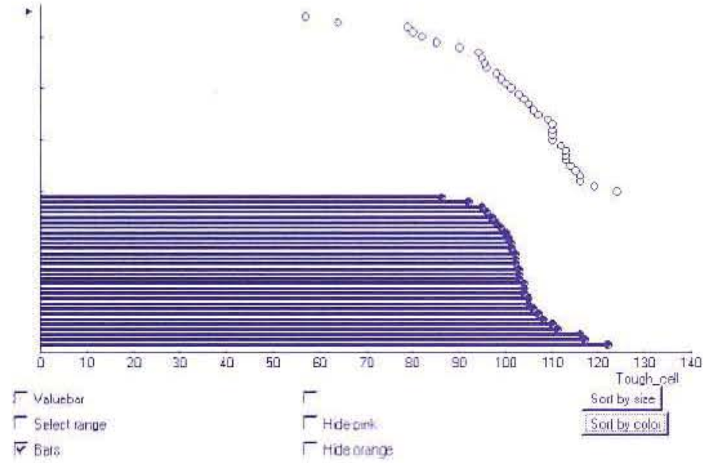
Computergebruik

In het experiment werden de programma's *Minitools 1* en *2* gebruikt, te vinden op het Wisweb. Het zijn beperkte programma's, maar je kunt er een klein aantal verschillende representaties mee maken, data sorteren en data in groepen verdelen.

Als een computerprogramma te veelzijdig en te onbekend is, werkt dat belemmerend: een leerling



FIGUUR 3 Olifanten tellen



FIGUUR 4 Levensduur van batterijen van twee verschillende merken

dreigt te verdrinken in de vele mogelijkheden en in het leren van het programma in plaats van te focussen op het onderwerp. Liever een serie beperkte programma's, toenemend in complexiteit, alleen voor het te behandelen onderwerp, met zomin mogelijk gedoe om het programma te leren kennen.
Ook computergebruik zal niet gaan zonder interactie. Op een gegeven moment moet de computer wel uit, om klassikaal of individueel te bespreken wat er gebeurd is en wat dat betekent: bijvoorbeeld een klassengesprek over het vergelijken van verschillende representaties van data.

Maar

Bakker heeft een instructietheorie ontworpen en heeft allerlei en heel veel argumenten en ervaringen aangedragen en gewogen. Hiermee is een belangrijke bijdrage geleverd aan het statistiekonderwijs. Maar er is niet aangetoond dat de theorie algemeen geldig is of het ontwerp optimaal. Er wordt geen rekening gehouden met de verschillende leerstijlen van leerlingen.
Magnifiek vind ik de beschrijving van de geschiedenis van concepten (alhoewel logischerwijs alleen verteld met het oog op bruikbaarheid voor het onderzoek), maar de geschiedenis van het onderwijs van die concepten wordt niet verteld. De analyse van de huidige leermiddelen ontbreekt en dat wordt wel heel snel afgedaan door deze te karakteriseren als een opeenstapeling van losse onderwerpen.
Het concept 'toeval' bij steekproeven heeft nog geen plaats gekregen in Bakkers instructietheorie, en dat kan toch wel zonder in kansrekening verzeild te raken? Bij metingen van een eindig aantal voorwerpen/personen kan dat in schijn vermeden worden, maar bij een steekproef om de kwaliteit van batterijen te bepalen speelt toeval een rol en de lengte van een klasgenoot kan trouwens extreem afwijkend zijn.
Anderzijds: de promovendus heeft genoeg te doen gehad!

Tot slot

Bent u inmiddels nieuwsgierig genoeg? Op de website van het Freudenthal instituut vindt u het hele proefschrift met plaatjes en al, mét een samenvatting in het Nederlands![2] U zult er veel van uw gading vinden. Ik heb meteen voor mijn vwo-wiskunde-b12-leerlingen de paragraaf met de ontstaansgeschiedenis van de normale verdeling gekopieerd, om maar eens een onverwacht bijproduct te noemen...

A. Bakker (2004). Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools. Utrecht: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education (CD-β wetenschappelijke bibliotheek; nr. 50)
ISBN 90-73346-58-4.

Noten

[1] Moore, D.S. (1997). New pedagogy and new content: The case for statistics. International Statistical Review, 65, 123-165
[2] www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2004-0513-153943/inhoud.htm

Over de recensent

Wouter Boer (e-mailadres: wlboer@tip.nl) is docent wiskunde aan het Greijdanus College te Zwolle en medeauteur van 'Moderne wiskunde' bovenbouw.

Puzzel 803 - Wiskundige legpuzzels

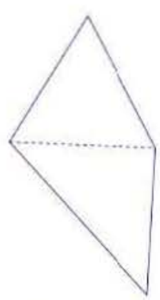
De opgaven gaan deze keer over een vierhoek die is gevormd door een gelijkzijdige driehoek en een gelijkbenige rechthoekige driehoek aan elkaar te leggen; zie figuur 1. De bedoeling is om met kopieën van deze vierhoek convexe veelhoeken te vormen.

In zijn boek *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*[1] maakt David Wells met 12 van zulke stukjes een regelmatige twaalfhoek (zie figuur 2), en dat lukt hem ook met 24 en met 48 stukjes.

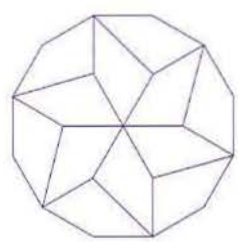
Opgave 1
Maak een convexe 10-hoek (van 10 stukjes).

Opgave 2
Maak een convexe 14-hoek (van 20 stukjes).

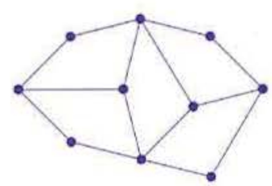
Opgave 3
Maak een convexe 16-hoek (van 44 stukjes).



FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3

De genoemde aantallen stukjes zijn meer bedoeld als aanwijzing dan als een extra eis.

Het is eenvoudig te bewijzen dat een convexe h-hoek niet mogelijk is als $h > 24$. Vermoedelijk is 18 het hoogst haalbare.

Het is voor het puzzelen aan te bevelen om een 20-tal stukjes te maken van niet al te dun karton, en om voor de lengte van de lange zijde ongeveer 6 cm te nemen. Eventuele niet-wiskundige gezinsleden kunnen dan gezellig meepuzzelen.

Voor het tekenen van een oplossing kun je beter een sjabloon maken met als lengte van de lange zijde ongeveer 3 cm. Een alternatieve manier om oplossingen te tekenen is met behulp van ruitjespapier. Het merkwaardige feit doet zich namelijk voor, dat allerlei standen van het stukje redelijk kunnen worden benaderd door de hoekpunten op roosterpunten te zetten; zie de convexe zevenhoek in figuur 3. De relatieve fout in de lengten van de zijden is kleiner dan 3%; de hoeken komen er wat slechter af, maar dat ervaar ik persoonlijk niet als storend.

Oplossingen
Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Sommige bijlagen, met name die met een doc-extensie, geven nogal eens problemen bij het openen. In zo'n geval vraag ik de inzender of hij/zij iets anders wil proberen. Daar gaan dan weer een paar dagen overheen. Wilt u hier rekening mee houden in verband met de deadline?

Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 6 januari 2005.

De ladderstand na deze datum levert de tussentijdse ladderprijs op, een boekenbon van € 30,00. Daarnaast is er voor de inzenders van oplossingen van deze wiskundige legpuzzel een kerstprijs te winnen, een boekenbon van € 30,00. De prijswinnaars worden bekendgemaakt in Euclides 80-5, het maartnummer.
Veel plezier!

Noot

[1] David Wells: The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. Penguin Books, isbn 0-14-011813-6. Wells schreef verder onder meer: The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzles, The Penguin Book of Curious and Interesting Numbers en The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics.

Oplossing 'Tetromino's'

Er zijn 11 oplossingen binnengekomen, waarvan 10 volledig. Men vond de opgaven eenvoudig, zoals bleek uit commentaren als: 'Leuke puzzeltjes, niet echt lastig' en 'Een aardige opgave, inderdaad niet al te moeilijk.'

In figuur 4 ziet u een oplossing van opgave 1. Als je de stukjes opbouwt uit eenheidskubussen in plaats van eenheidsvierkanten, kun je er ook een blokje van 2 × 3 × 4 mee vormen.

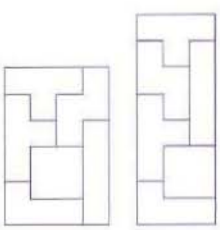
Om opgave 2 tot een goed einde te brengen kun je ofwel de T omzetten in een andere tetromino, ofwel een tweede T maken. Er zijn binnen de gegeven spelregels drie mogelijkheden: van N naar T, van T naar L, van O naar T; zie figuur 5. Lieke de Rooij merkt op dat de eerste methode qua zagen het handigst is! Als je eenmaal zo'n splitsing hebt gevonden, is de rest eenvoudig. Voor één van de oplossingen zie figuur 6.

Ladderstand

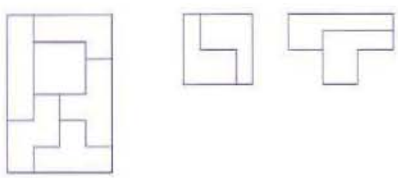
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
D. Buijs 234,
L. de Rooij 217,
A. Verheul 213,
T. Afman 200,
L. van den Raadt 175,
T. Kool 143,
J. Meerhof 134,
W. Doyer 122.

De complete ladderstand is te zien op de website van Euclides:
www.nvvw.nl/euclladder.html.

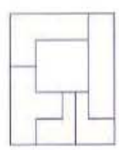
Overigens stond Dick Buijs aan het eind van het vorige seizoen ook bovenaan de puzzelladder. Daarmee won hij een boekenbon van € 30,00. Alsnog gefeliciteerd!



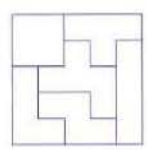
FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6



FIGUUR 7

Opgave 3 heeft de aardige eigenschap dat de oplossing (zie figuur 7) uniek is.

D. Buijs, A. Verheul, E. van Kervel, L.H. van den Raadt, T. Notenboom, W. Doyer, H. Neggers, L. de Rooij, W. van den Camp en C.T.F.M. Roelofs stuurden volledige oplossingen in. T. Kool verblijdde me met een print van fotokwaliteit met oplossingen van de opgaven 1 en 3; hij kon helaas geen truc vinden voor opgave 2.

Kalender
In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*).
Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de komende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen (en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*).

nr	verschijnt	deadline
4	27 januari 2005	7 december 2004
5	3 maart 2005	18 januari 2005
6	14 april 2005	1 maart 2005
7	26 mei 2005	5 april 2005
8	23 juni 2005	10 mei 2005

woensdag 15 december 2004
(ook op 23-2-2005 en 13-4-2005)
Cursus Java-programmeren
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 21 december 2004, Groningen
Studiedag: Wiskunde, dienstmaagd of koningin
Organisatie RuG

zaterdag 8 januari 2005, Utrecht
Wintersymposium Wiskunde en Verkeer
Organisatie Koninklijk Wiskundig Genootschap

vrijdag 14 januari 2005, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2005
Organisatie Stichting NWO

woensdag 19 januari 2005, Ede
3e Reehorstconferentie wiskunde
Organisatie APS
Zie verder ook de advertentie elders in dit blad.

woensdag 19 januari 2005, Amsterdam
Nascholingscursus Simulatie op TI-83 en PC
Organisatie vakgroep Econometrie VU, Amsterdam

woensdag 26 januari 2005
Conferentie Practische ICT-toepassingen wiskunde
Organisatie APS
Zie verder ook de advertentie elders in dit blad.

vr. 4 en za. 5 februari 2005, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 25 februari 2005
Grote Rekendag
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 8 maart 2005 (ook op 5 april)
Cursus Ruimtemeetkunde met ICT
Organisatie Freudenthal Instituut

do. 17 en vr. 18 maart 2005, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 18 maart 2005
Kangoeroe-wedstrijd
Organsisatie Radboud Universiteit Nijmegen

zaterdag 28 mei 2005, Utrecht
Symposium XI: Kansen en verwachtingen
Organisatie HKROW

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

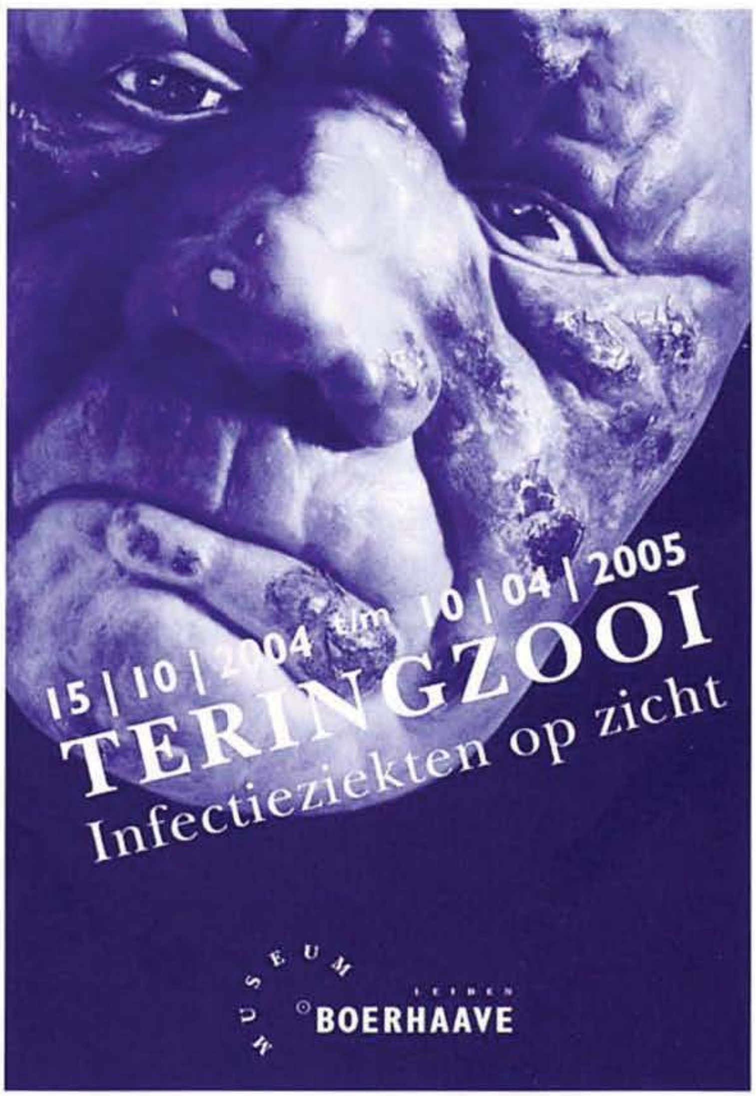
* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christaan Huygens

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html



15 | 10 | 2004 t/m 10 | 04 | 2005
TERINGZOOI
Infectieziekten op zicht
MUSEUM BOERHAAVE